Муниципальное бюджетное образовательное учреждение «Гимназия №19»

Решение тригонометрических уравнений

Рабочая тетрадь по математике

Курган – 2019

Решение тригонометрических уравнений: Рабочая тетрадь по математике/составитель Ануфриева Н.П. – Курган: МБОУ «Гимназия №19», 2019.- 27 с.

Составитель:
Ануфриева Н.П., преподаватель математики высшей квалификационной категории МБОУ «Гимназия №19»

Рецензенты:

1. Нянькина Е.П., преподаватель математики и информатики высшей категории ГБОУ СПО «Курганский государственный колледж»

2. Маркова Т.Н., заведующая учебно - методическим отделом ГАОУ ДПО ИРОСТ Курганской области

Рабочая тетрадь по математике по организации самостоятельной работы может использоваться учителями в общеобразовательных школах, а так же преподавателями дисциплины математика в учреждениях среднего профессионального образования .

Оглавление

Пояснительная записка

Рабочая тетрадь по математике рекомендуется для самостоятельного изучении темы «Тригонометрические уравнения». Составлена на основе Федерального компонента государственного стандарта основного и среднего (полного) общего образования (базовый уровень).

Учебное пособие по организации самостоятельной деятельности работы студентов поможет сформировать такие компетенции по дисциплине как:

общие:

организовать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения предложенных задач, оценивать их эффективность и качество.

принимать решения в стандартных и не стандартных ситуациях и нести за них ответственность.

осуществлять поиск и использование информации.

владеть информационной культурой, анализировать и оценивать информацию с использованием информационно-коммуникационных технологий.

готовность и способность к образованию и самообразованию на протяжении всей жизни; сознательное отношение к непрерывному образованию, как условию успешной профессиональной и общественной деятельности.

специальные:

умение проводить вычисления, использовать для подсчетов известные формулы;

умение извлечь и проинтерпретировать информацию, представленную в различной форме;

владение методами и алгоритмами решения тригонометрических уравнений

владение навыками использования готовых компьютерных программ для поиска пути решения и иллюстрации решения уравнений.

Пособие составлено из 5 блоков, каждый из которых посвящен отдельному виду тригонометрических уравнений, методу их решения.

Блок содержит указания, краткую теорию, образцы решения задач, упражнения для самостоятельного решения, распределенные в равноценные варианты. Первый вариант - основные задания, второй – корректирующие.

Вариант 3 содержит дополнительные задания, которые могут использоваться по усмотрению преподавателя (в качестве домашних контрольных работ), для промежуточного контроля, организации, повторения, диагностики проблемных зон в знаниях студентов.

Каждый блок предусматривает систему контроля. Отдельно оцениваются задания повышенной сложности.

В основу оценивания положены принципы уровневой дифференциации :

I уровень соответствует оценке «удовлетворительно»,

II уровень- оценка «хорошо»,

III уровень – оценка «отлично».

Рабочая тетрадь позволяет проверить навыки решения тригонометрических уравнений, качество усвоения теоретического материала, выстроить для каждого студента индивидуальную траекторию повторения и эффективно подготовиться к сдаче экзамена по дисциплине.

Рабочая тетрадь предназначена не только для учащихся 10-11 классов общеобразовательных учреждений, а так же для студентов 1 курса в учреждениях среднего профессионального образования.

1. Простейшие тригонометрические уравнения

Под тригонометрическими уравнениями обычно понимают уравнения, в которых переменная стоит под знаком одной или нескольких тригонометрических функций.

Обратите внимание на несколько важных обстоятельств, которые надо иметь в виду при решении:

все общие правила, относящиеся к решению уравнений, имеют ту же силу;

не существует исчерпывающей классификации тригонометрических уравнений, хотя типы и приемы их решения, изложенные далее используются чаще всего;

какой бы сложности ни было уравнение оно все равно сводится к решению простейших тригонометрических уравнений.

вспомните формулы решений простейших тригонометрических уравнений.

Уравнение	Формула решений
sin x=a, a∈ [….] cos x=a , a∈ [….] tg x= a, a∈ [….] ctg x= a, a∈ [….]	x= x= x= x=

Запишите частные случаи решения простейших уравнений для некоторых значений а

sin x = 0, x = Пn , n ∈Z

sin x = 1, x =$\frac{\pi}{2}$ + 2Пn , n ∈Z

sin x = -1, x =- $\frac{\pi}{2}$ + 2Пn , n ∈Z

cos x = 0 , x = $\frac{\pi}{2}$ + 2Пn , n ∈Z

cos x = 1 , x = 2Пn , n ∈Z

cos x = -1 , x = П + 2Пn , n ∈Z

tg x= 0, x = Пn , n ∈Z

При решении тригонометрических уравнений следует соблюдать общие правила:

- следить за равномерностью преобразований;
- не допускать потери корней;
- отбрасывать посторонние корни.

Помни: при решении уравнений получаются серии корней, а ответ записывается в виде объединения этих серий. Иногда эти серии пересекаются. В этом случае следует исключить повторяющиеся решения. В ответе не должно быть значений неизвестных, при которых выражения в левой и правой частях уравнения не определены. Такие значения, если они появились в процессе решения, надо исключить.

Для тригонометрических уравнений не существует единого метода решения.

В каждом конкретном случае успех определяется знанием тригонометрических формул и навыками решения задач.

Самостоятельно решите уравнения:

Вариант 1

1	2 cos x =1	1 балл

Решение

cos x =…………

x = ±…………

x =………

Ответ:

2	sin 3x = -1	1 балл

Решение

3 x =…………, к∈Z

x =………

Ответ:

3	ctg (x - $\frac{\pi}{6}$) = 0	2 балла

Решение

x - $\frac{\pi}{6}$ =………, к∈Z

x =………

Ответ:

4	tg $\frac{x}{2} = \frac{1}{3}$	2 балла

Решение

$\frac{x}{2} =$

x =………

Ответ:

5	$\sqrt{2}$ - 2 cos ($\frac{x}{3}+¿\frac{\pi}{6}$) = 0	3 балла

Решение

cos ($\frac{x}{3}+¿\frac{\pi}{6}$) =

$\frac{x}{3}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{\square}+2\pi k$ *или* $\frac{x}{3}+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{\square}+2\pi k$, к∈Z

$\frac{x}{3}=\ldots$ $\frac{x}{3}=\ldots$

x =……… x =………

Ответ:

Проверьте свою работу у учителя (преподавателя)

Посчитайте баллы, набранные за верно выполненные задания.

Если вы получили:

4б, то вы находитесь на I уровне,

6б – на II уровне,

9б- на III уровне.

Если количество набранных баллов вас не устраивает, то прорешайте соответствующие задания корректирующего варианта, оцените работу и добавьте набранные баллы. Подсчитайте итоговое количество баллов, получите отметку.

Корректирующий вариант

1	3sin x = 1,5	1 балл

Решение

Ответ:

2	cos 2x =1	1 балл

Решение

Ответ:

3	sin (x + $\frac{\pi}{4}$) = 0	2 балла

Решение

Ответ:

4	ctg $\frac{x}{3}=\frac{1}{3}$	2 балла

Решение

Ответ:

5	$3tg(\frac{x}{2}-¿\frac{\pi}{4})=\sqrt{3}$	3 балла

Решение

Ответ:

Дополнительное задание (оценивается отдельно)

1	2cosx= -$\sqrt{3}$	1балл
2	sin4x=1	2 балла
3	cos(x +$\frac{\pi}{3}$) = 0	2балла

4	$\text{ctg}\frac{x}{2}= \frac{-1}{2}$	3 балла
5	$\sqrt{3}\text{tg}\ (\frac{x}{4}- \pi)+1 = 0$	4 балла

2. Метод разложения на множители

Научимся решать тригонометрические уравнения методом разложения на множители

При разложении на множители используются те же приемы, что в алгебре:

а) вынесение общего множителя за скобку;

б) способ группировки;

в) использование формул сокращенного умножения, например:

а2 – в2 = (а-в)(а+в)

Для разложения на множители применяют и некоторые тригонометрические формулы

Вспомни и продолжи равенства

$\sin\alpha\text{-}\sin\beta=2\sin\frac{\alpha\text{-}\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

$\sin\alpha+\sin\beta=$………………

$\cos\alpha+\cos\beta=$…………………

$\cos\alpha\text{-}\cos\beta=$…………………

2.1 Вынесение общего множителя за скобки

Пример №1 Решите уравнение

$\sin 4x = 3\cos 2x$

Решение

Применяем формулу синуса двойного угла

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\sin 4x = \sin 2(2x) = 2\sin 2x\cos 2x$

$2\sin 2x\cos 2x - 3\cos 2x = 0$

Вынесем общий множитель $\cos 2x$ *за скобки*:

$\cos 2x\ (2\sin 2x\text{-}3) = 0$

Произведение равно нулю, когда хотя бы один из множителей равен нулю, а другие при этом не теряют смысла.

Поэтому каждый множитель приравняем к нулю и решим два простейших тригонометрических уравнения:

$\cos 2x = 0$ или $2\sin 2x=3$

$2x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$ $\sin 2x = \frac{3}{2}$

x=$\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$sin2x =1,5 нет корней, т.к. (sin2x)≤ 1

Ответ: x= $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$

Решите самостоятельно уравнения:

1	2cos2x + $\sqrt{2}$ cosx= 0	1балл

Решение

cosx (……+………) =0

Ответ:

2	sin2x – sin x = 0	2балла

Решение

2……….-sinx = 0

………(2 cosx -…..) =0

Ответ:

2.2 Способ группировки

Пример №2 Решите уравнение

4sin3x – sin x = 3-4cos2x

Решение

Для разложения на множители применяем способ группировки:

По основному тригонометрическому тождеству

cos2x=1- sin 2x; подставим, преобразуем;

Вынесем за скобки общий множитель;

4sin3x – sin x = 3 – 4 cos2x,

4sin3x – sin x = 3 – 4 (1 – sin2x)

4sin3x – sin x = 3 – 4+4 sin2x

4sin3x – sin x = -1+4 sin2x

sinx(4 sin2x-1) + 1-4 sin2x=0

sinx(4 sin2x-1) –(4 sin2x-1)=0

(4 sin2x-1) (sinx-1)=0

4 sin2x-1=0 или sinx-1=0

sin2x=$\frac{1}{4}$ sinx=1

sin x= $\frac{1}{2}$ или sin x$\frac{-1}{2}$ x = $\frac{\pi}{2}+2\ \pi n$

$$\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in z \\ x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n, n\in z \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x=\frac{-\pi}{6}+2\pi n, n\in z \\ x=\frac{-5\pi}{6}+2\pi n, n\in z \end{array}\right. \quad n\in z$$

Объединим серии решений

$x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in z$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in z \\ x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in z \end{array}\right.$

Решите уравнение самостоятельно, используя для разложения на множители способ группировки

3	tg 2x + $\sqrt{3}$ tgx = $\sqrt{3}+tgx$	2балла

Решение

tgx (…..+$\sqrt{3}$) – (….+tgx) =0

(……+…..) (…..+…..) = 0

………….или…………

Ответ:

4	sin 2x – cosx = 2sinx – 1	3балла

Решение

×2…….- cosx = 2 sinx – 1

…….×¿sinx - …..) – (……-……) = 0

(……-……) (…….-……) = 0

2.3. Применение некоторых формул тригонометрии

Решите самостоятельно уравнения, используя для разложения на множители формулы суммы и разности тригонометрических функций.

5	cos3x – cosx =0	3балла

Решение

Воспользуемся формулой

cosα –cosβ = -2 sin$\frac{\alpha+\beta}{2}$ sin$\frac{\alpha-\beta}{2}$

Ответ:

Пример №3 Решите уравнение

sin 5x = cos x

Решение

sin 5x = cos x

Воспользуемся формулой приведения

cos x = sin ($\frac{\pi}{2}$ - x)

заменим

sin5x – sin $(\frac{\pi}{2} - x) = 0$

2sin$\frac{5x-(\frac{\pi}{2}-x)}{2}$ × cos 2sin$\frac{5x+(\frac{\pi}{2}-x)}{2}$ = 0

2sin (3x -$\frac{\pi}{4}$)×cos (2x +$\frac{\pi}{4}$¿= 0

sin (3x -$\frac{\pi}{4}$)¿ 0 или cos (2x +$\frac{\pi}{4}$¿=0

3x -$\frac{\pi}{4}$ = πn, $n \in Z$ *или* 2x + $\frac{\pi}{4}$ = $\frac{\pi}{2}$ +πn, $n \in Z$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3}n, n\in z \\ \frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}n, n\in z \end{array}\right.$

Решите самостоятельно

6	sin 3x = - cos x	3балла

Решение

Ответ:

Проверьте работу у учителя (преподавателя)

Подсчитайте баллы, набранные за верно выполненные задания, если вы получили

4-7 баллов – вы на 1 уровне

8- 11 баллов – вы на 2 уровне

13-14 баллов – вы на 3 уровне

Корректирующий вариант

1	2sin2x – sin x = 0	1 балл
2	2sinx +sin 2x = 0	2 балла
3	$\sqrt{3}$ tg 2x + tg x = $3tg\,x+\sqrt{3}$	2 балла
4	sin2x + 2sinx = cosx + 1	3 балла
5	sin3x – sinx = 0	3 балла
6	cosx = sin5x	3 балла

Дополнительное задание (оценивается отдельно)

1	tg 2x +tg x = 0	1 балл
2	3 cosx + 2sin 2x = 0	2 балла
3	cos2x + sin2x =cosx	2 балла
4	cos2x – cos2x- $\sqrt{2}$sinx = 0	3 балла
5	cos5x – cos x=0	3 балла
6	sin x + sin3x – sin5x –sin 7x =0	4 балла

3. Тригонометрические уравнения, сводящиеся к квадратным

Научимся решать тригонометрические уравнения, сводящиеся к квадратным.

Пример № 1.

Решите уравнение

cos 2 x - 5 sin x – 3 = 0

Решение

Применим формулу косинуса двойного аргумента

cos 2x= 1 – 2 sin2x

Получим

1-2 sin2x – 5 sin x – 3 =0

Приведем подобные слагаемые, умножим на – 1

2 sin2x +5 sin x+ 2 = 0

Получим квадратное уравнение относительно sin x. Введем замену

Sin x = t, t $\in[-1;1]$

2 t2 + 5 t + 2= 0

Решим квадратное уравнение

D = 52 -4×2×2=9

t1,2 =$\frac{-5\pm\sqrt{9}}{2\times 2}$

t1= -2, t2= -$\frac{1}{2}$

-2$\in[-1;1]$выполним обратную замену

sin x=-$\frac{1}{2}$

x = (-1)к arc sin ($\frac{-1}{2}$)+$\pi к$, к$\in z$

x= (-1)к× ¿) + $\pi к$, к∈ z

Ответ: x = (-1)к+1 × $\frac{\pi}{6}$+ $\pi к$, к∈ z

Решите самостоятельно уравнения, сводящиеся к квадратным

Вариант №1

1	sin2 x + 2 = 3 sin x	1б

Решение

Пусть sin x=……, t ∈…..

Ответ:

2	6cos2 x + cosx - 1 = 0	1б

Решение

Пусть cos x=t , t …..

Ответ:

3	sin2 x - 3cosx+3 = 0	2б

Решение

По основному тригонометрическому тождеству

sin2 x=1 – cos2 x,подставим

Ответ:

4	5 cos2 x + 6 sin x - 6 = 0	2б

Решение

По основному тригонометрическому тождеству

cos2 x = 1 - sin2 x , подставим

Ответ:

5	tg2 2x- 6tg 2x +5 = 0	3б

Проверьте свою работу у учителя (преподавателя)

Посчитайте баллы, набранные за верно выполненные задания.

Если вы получили:

4б, то вы находитесь на I уровне,

6б – на II уровне,

9б- на III уровне.

Если количество набранных баллов вас не устраивает, то прорешайте соответствующие задания корректирующего варианта, оцените работу и добавьте набранные баллы. Подсчитайте итоговое количество баллов, получите отметку.

Корректирующий вариант

1	3sin2 x- 5sin x-2 = 0	1 балл

Решение

Ответ:

2	2cos2x – cosx-3 = 0	1 балл

Решение

Ответ:

3	2sin2 x+ 3cosx = 0	2 балла

Решение

Ответ:

4	4sin x+ cos2x = 4	2 балла

Решение

Ответ:

5	$3tg2\ 3x + 2tg3x - 1 = 0$	3 балла

Решение

Ответ:

Дополнительное задание (оценивается отдельно)

1	4 sin 2x+11 sinx – 3 = 0	1балл
2	2cos2x + 3 cosx -2 = 0	1 балл
3	8sin2 x +cosx+1 = 0	2балла
4	4sin3 x+ cos2 3x = 4	2балла
5	$7\,ctg2\ \frac{x}{2} + 2\,ctg2\ \frac{x}{2} = 5$	3 балла

4. Однородные тригонометрические уравнения

Здесь мы познакомимся с довольно часто встречающимися на практике тригонометрическими уравнениями специального вида.

4.1 Однородные уравнения первой степени

Уравнение вида

$$\boxed{a \sin x + в \cos x = 0}$$

Где a ≠0, в ≠ 0, называется однородным тригонометрическим уравнением первой степени.

Способ решения:

a sin x + в cos x = 0, a ≠0, в ≠ 0

Разделим обе части уравнения почленно на cos x, получим

$$\frac{a\sin x}{\cos x} + \frac{в\cos x}{\cos x} = \frac{0}{\cos x}$$

a tgx + в = 0

tgx= $-\frac{в}{a}$;

x = arctg $(-\frac{в}{a}) + \pi n, n \in z$

Заметим, что делить обе части уравнения на cos x можно, так как значение x при которых cos x = 0, не являются корнями данного уравнения

Пример № 1

Решить уравнение 2 sin x – 3 cos x =0

Решение

Разделим обе части уравнения почленно на cos x, получим

$\frac{2\sin x}{\cos x} - \frac{3\cos x}{\cos x} = \frac{0}{\cos x}$

2 tgx – 3 = 0;

tgx = $\frac{3}{2}$;

x = arctg $\frac{3}{2} + \pi n, n \in z$

Ответ: x = arctg $\frac{3}{2} + \pi n, n \in z$

Пример № 2

Решите уравнение

cos $(2\pi - 2x)$ = cos (2x - $\frac{\pi}{2}$)

Решение.

Мы знаем, что cos (- t) = cos t, значит

cos (2x -$\frac{\pi}{2}$)= cos (2x -$\frac{\pi}{2}$)

По формулам приведения имеет:

cos $(2\pi - 2x)$ = cos 2 x;

cos ($\frac{\pi}{2}$ - 2x) = sin 2 x;

Это позволяет переписать заданное уравнение в более простом виде:

cos 2x = sin 2 x,

sin 2x – cos 2 x = 0

разделим обе части уравнения почленно на cos 2 x:

tg2x – 1 =0;

tg2x = 1

2x = arctg 1 $+\pi n$

2x = $\frac{\pi}{4} + \pi n$

X = $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}$ n, $n \in z$

Ответ: x = $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}$ n, $n \in z$

Решите самостоятельно однородные тригонометрические уравнения первой степени

Вариант №1

1	$\sqrt{3}\cos$ x - sinx = 0	1б

Решение

Ответ:

2	sin x + cosx = 0	1б

Решение

Ответ:

3	$\sqrt{3}$ sin3x = cos3x	2б

Решение

Ответ:

4	sin ($\frac{\pi}{2}$ + 2 x) + cos ($\frac{\pi}{2}$ - 2 x) = 0	2б

Решение

Ответ:

5	2sinx = $\sqrt{3}$¿sin x)	3б

Решение

Раскроем скобки, приведем подобные

Ответ:

Проверьте свою работу у учителя (преподавателя)

Посчитайте баллы, набранные за верно выполненные задания.

Если вы получили:

4б, то вы находитесь на I уровне,

6б – на II уровне,

9б- на III уровне.

Если количество набранных баллов вас не устраивает, то прорешайте соответствующие задания корректирующего варианта, оцените работу и добавьте набранные баллы. Подсчитайте итоговое количество баллов, получите отметку.

Корректирующий вариант

1	cosx –$\sqrt{3}$ sinx =0	1 балл

Решение

Ответ:

2	cos x – sinx = 0	1 балл

Решение

Ответ:

3	$\sqrt{3}$sin 2 x + cos 2x= 0	2 балла

Решение

Ответ:

4	cos ($\frac{\pi}{2}$ -$\frac{x}{2}$) – 3 cos (π -$\frac{x}{2}$¿=0	2 балла

Решение

Ответ:

5	4sinxcosxcos2x = $\sqrt{3}$cos4x	3 балла

Решение

Применим формулу

sin 2x = 2 sinxcosx

И упростим левую часть уравнения

Ответ:

Дополнительное задание (оценивается отдельно)

1	sin x-3 cosx = 0	1балл
2	$\sqrt{3}$sinx + cosx +0	1 балл
3	5 sin 2x + 6 cos2x=0	2балла
4	2 sin (π -3x) + cos (2π – 3x) =0	2балла
5	2(2sinx + $\frac{1}{\sqrt{3}}$ cosx) =2$\sqrt{3}$cosx	3 балла

4.2 Однородные уравнения второй степени

Уравнение вида

$$\boxed{\text{a sin 2x+ вsinxcosx+ ccos 2x=0}}$$

Где а, в, с не равны 0, называются полным однородным тригонометрическим уравнением второй степени относительно sinx и cosx.

Заметим, что сумма показателей степеней при sinx и cosx у всех слагаемых такого уравнения равна двум. Полное однородное тригонометрическое уравнение второй степени сводится к квадратному уравнению относительно tgx или ctgx делением обеих частей на cos 2x или на sin2x.

Такое деление выполнить можно, так как те значения x , при которых sin x = 0 или cos x =0 не являются корнями данного уравнения.

Действительно , например, если sin x = 0, то

a×02+ в×Ocosx + ccos 2x =0,

т.е. и cos x тоже должен быть равен 0. Это противоречит основному тригонометрическому тождеству: cos 2x + sin 2x = 1

Пример №1.

Решить уравнение.

sin 2x – 3 sinx cosx + 2 cos 2x =0

Решение.

Разделим обе части уравнения почленно на cos 2x, получим

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{3\, sinx\, cosx}{\cos^2 x} + \frac{2\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{0}{\cos^2 x} / \div \cos^2 x \neq 0$$

tg 2x – 3 tgx + 2 = 0

Введем новую переменную

z= tgx, получим

z 2– 3z + 2 = 0

D = 9 – 4× 21 = 1

z1,2= $\frac{3 \pm \sqrt{1}}{2}$

z1 = 2 z2 =1

tgx = 2 или tgx = 1,

x = arctg 2 +π n или x = arctg 1 +π n,

x = $\frac{\pi}{4}$ + π n, n$\in$ z

Ответ: x = $\frac{\pi}{4}$ + π n, x = arctg 2 +π n , n$\in$ z

Пример № 2

Решите уравнение

sin 2x + 2 sinxcosx- 3 cos 2x = 0/ ÷cos 2x $\neq 0$

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{2\, sinx\, cosx}{\cos^2 x} - \frac{3\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{0}{\cos^2 x}$$

tg 2x +2 tgx - 3 = 0

Решим квадратное уравнение

t1 = …… или t2 = ……

Выполним обратную замену

tg x = …, или tg x = …

Решим простейшие тригонометрические уравнения по общей формуле

x = … или x = ….

x = … x = ….

Ответ: $\frac{\pi}{4}$ + π n, - arctg 3 +π n, n$\in$ z

4.3 Неполные однородные тригонометрические уравнения.

Если в однородном тригонометрическом уравнении

a sin 2x + вsinxcosx + ccos 2x = 0,

коэффицент а = 0, или с = 0, или в = 0, то получим неполное однородное тригонометрическое уравнение второй степени.

Пусть а = 0, тогда уравнение принимает вид

вsinx cosx + сcos 2x = 0

это уравнение можно решить методом разложения на множители:

cosx (вsinx + сcosx) = 0;

cosx = 0 или вsinx + сcosx = 0

Получилось 2 уравнения , которые мы решать умеем.

Аналогично и в случае, когда с= 0, т.е. , когда однородное уравнение имеет вид

asin 2x + в sinx cosx = 0

Тогда за скобки выносим sin x

sin x (a sinx + вcos x) = 0.

Пример №3.

Решите уравнение

$\sqrt{3}$sinxcosx + cos 2x = 0

Решение.

Здесь отсутствует слагаемое вида a sin 2x , т.е. a= 0

Решим уравнение методом разложения на множители:

cosx ($\sqrt{3}$sinx + cosx) = 0

cosx = 0 или $\sqrt{3}$sinx + cosx=0

x = $\frac{\pi}{2} + \pi$ n

Решим уравнение

$\sqrt{3}$sinx + cosx = 0

Это однородное тригонометрическое уравнение первой степени. Решим его с помощью почленного деления обеих частей уравнения на cosx:

$\frac{\sqrt{3}sinx}{cosx}+\frac{cosx}{cosx}=\frac{0}{cosx}$

$\sqrt{3}$tgx + 1 =0;

tgx = - $\frac{1}{\sqrt{3}}$

x = arctg (- $\frac{1}{\sqrt{3}}$)+π n;

x= - $\frac{\pi}{6}$ + π n;

Ответ: x= $\frac{\pi}{2}$ + π n; x = - $\frac{\pi}{6}$ + π n, n$\in$ z.

Пример №4. Решить уравнение

cos 2x – sin2x = 0

Решение

cos 2x – sin2x = 0, применим формулу

sin 2 x= 2 sin x cos x

cos 2x – 2 sinxcosx = 0

Вынесем за скобку общий множитель

cosx× (cos x – 2 sinx) = 0

cosx = 0 или cos x – 2 sinx = 0 ¿÷cosx ≠ 0

x = …. или $\frac{cosx}{cosx}$ - 2 $\frac{\sin x}{cosx}$ = 0

1 – 2 tgx = 0

tgx = $\frac{1}{2}$

x = …

Ответ: arctg $\frac{1}{2}$ +π к, $\frac{\pi}{2}$ + π к, к∈ z.

4.4 Преобразование к однородному тригонометрическому уравнению

Рассмотрим уравнения вида

$$\boxed{\text{asin 2x + вsinxcosx +ccos 2x =d}}$$

Где а, в с не равны нулю одновременно и d ≠0

Данное уравнение не является однородным второй степени, так как слагаемые в левой части уравнения имеют одну и ту же степень 2, но свободный член d ≠0.

Однако, данное уравнение можно свести к однородному второй степени с помощью основного тригонометрического тождества:

d = d ×1 = d× (cos 2x + sin 2x)

Пример №5 Решите уравнение

6 sin 2x – 1,5 sin2x – 5 cos 2x = 2

Решение

6 sin 2x – 1,5 sin2x – 5 cos 2x = 2

6 sin 2x – 1,5×2 sinx cosx – 5 cos 2x = 2

6 sin 2x – 3sinx cosx – 5 cos 2x = 2

Представим число 2 в виде произведения

2= 2×1=¿2(cos 2x + sin 2x)

6 sin 2x – 3sinx cosx – 5 cos 2x =2(cos 2x + sin 2x)

Раскроем скобки, перенесем все слагаемые в левую часть, приведем подобные члены

6 sin 2x – 3sinx cosx – 5 cos 2x -2 cos 2x + sin 2x=0

4sin 2x – 3sinx cosx – 7 cos 2x =0

Решим полученное однородное уравнение второй степени

4tg 2x – 3tgx – 7 =0

Пусть tgx=t

4t2 – 3t – 7 = 0

D = …..

t1= …. или t2= ….

tgx= …. или tgx= ….

x =… или x=….

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi$ n, n∈ z

arctg $\frac{7}{4}$ $+\pi$ к, к∈ z.

Решите самостоятельно однородные тригонометрические уравнения второй степени

Вариант №1

1	sin 2x - 4 sinx cosx +3cos 2x =0	1б

Решение

Ответ:

2	sin 2x +sinx cosx - 2 cos 2x =0	1б

Решение

Ответ:

3	sin 2x +sinx cosx =0	2б

Решение

Ответ:

4	$\frac{\sqrt{3}}{2}$sin2x +sin 2x =0	2б

Решение

Ответ:

5	5sin 2x -14sinx cosx - 3cos 2x =0	3б

Решение

Раскроем скобки, приведем подобные

Ответ:

Проверьте свою работу у учителя (преподавателя)

Посчитайте баллы, набранные за верно выполненные задания.

Если вы получили:

4б, то вы находитесь на I уровне,

6б – на II уровне,

9б- на III уровне.

Если количество набранных баллов вас не устраивает, то прорешайте соответствующие задания корректирующего варианта, оцените работу и добавьте набранные баллы. Подсчитайте итоговое количество баллов, получите отметку.

Корректирующий вариант

1	$3\sin 2x + \sin x \cos x - 2 \cos 2x = 0$	1 балл

Решение

Ответ:

2	$4\sin 2x - \sin x \cos x - 3 \cos 2x = 0$	1 балл

Решение

Ответ:

3	$\sqrt{3}\sin x \cos x + \cos 2x = 0$	2 балла

Решение

Ответ:

4	$3 \cos 2x = 2 \sin 2x$	2 балла

Решение

Ответ:

5	$2 \cos 2x - \sin x \cos x + 5\sin 2x = 3$	3 балла

Дополнительное задание (оценивается отдельно)

1	$2\sin 2x + 3 \cos 2x = 5\sin x \cos x$	1балл
2	$3\sin 2x + 4\cos 2x = 13\sin x \cos x$	1 балл
3	$\sqrt{3}\cos 2x = \sin x \cos x$	2балла
4	$3\sin 2x - \sin 2x = 0$	2балла
5	$2\sin 2x + 5 \cos 2x = 5\sin x \cos x + 1$	3 балла

5. Метод введения вспомогательного угла

Метод введения вспомогательного угла основан на теореме , справедливой в силу основного тригонометрического тождества.

Теорема:
Если сумма квадратов некоторых двух чисел равна 1, то эти числа можно рассматривать как синус и косинус одного и того же угла

Пример №1

Решите уравнение:

$\sin\frac{x}{2}+\sqrt{3}\cos\frac{x}{2}=2$

Решение:

$\sin\frac{x}{2}+\sqrt{3}\cos\frac{x}{2}=2/\div 2$

$\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{x}{2}=1$

Заметим, что полученные коэффициенты $\frac{1}{2}$и $\frac{\sqrt{3}}{2}$ нам хорошо знакомы, они являются синусом и косинусом одного и того же угла, например:

$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ или $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

Действительно

$(\frac{1}{2}$¿ $2+(\frac{\sqrt{3}}{2})$ $2=1$ – верное равенство

Заменим эти коэффициенты в уравнении:

1 способ	2 способ
$\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{x}{2}=1$	$\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{x}{2}=1$
$\cos(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2})=1$	$\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3})=1$
$\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}=0+2\pi n, n\in z$	$\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in z$
$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in z$	$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in z$
$x=\frac{\pi}{3}+4\pi n, n\in z$	$x=\frac{\pi}{3}+4\pi n, n\in z$

Ответ: $x=\frac{\pi}{3}+4\pi n, n\in z$

Таким образом применяя описанный метод, можно свести уравнение к простейшим:

cos = a (если составить сумму произведений одинаковых тригонометрических функций);

sinx = a (если составить сумму произведений разных тригонометрических функций)

Решите самостоятельно уравнения, используя метод введения вспомогательного угла:

1	$\sqrt{3}\sin x+\cos x-2=0$	1б

Решение:

Чтобы получить коэффициенты $\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{1}{2}$, разделим обе части уравнения на 2 и заменим коэффициенты $\frac{\sqrt{3}}{2}$ =…… ; $\frac{1}{2}$=……..

Ответ:

2	$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x=1$	1б

Решение

Заменим $\frac{\sqrt{2}}{2}=¿$

$\frac{\sqrt{2}}{2}=¿$

Ответ:

3	$\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}=1$	2б

Решение

Разделим обе части уравнения на $\sqrt{2}$

Ответ:

4	sin 3 x - cos 3 x = 1	2б

Решение

Разделим обе части уравнения на $\sqrt{2}$

Ответ:

Метод введения вспомогательного угла, применим так же для решения любого уравнения

вида

acosx + вsinx=c

Где а, в, с не равны нулю.

При этом поступают следующим образом: выносят за скобку квадратный корень из суммы квадратов коэффициентов а и в :

acosx + вsinx=c

$\sqrt{a^2+b^2}\times\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x+\frac{в}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right)=c,$

Зачем?

Оказывается полученные числа

$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $\frac{в}{\sqrt{a^2+b^2}}$

удовлетворяют условиям теоремы:

$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}¿\,2+\left(\frac{в}{\sqrt{a^2+b^2}}¿\,2=\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}=1$

Таким образом, эти коэффициенты можно заменить синусом одного угла αи уже известным способом перейти к простейшему тригонометрическому уравнению.

Пример.

Решите уравнение

3 sinx + 4 cosx = 2

Решение

3 sinx + 4 cosx = 2 , вынесем за скобку $\sqrt{3^2+4^2}$, причем заметим, что

$\sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$,

$\sqrt{3^2+4^2}(\frac{3}{5} sinx + \frac{4}{5}$ cosx) = 2.

Так как$(\frac{3}{5})$ 2 +($\frac{4}{5}$) 2= $\frac{25}{25}$ = 1, то пусть $\frac{3}{5}$ = sinα , а

$\frac{4}{5}$ = cosα, получим:

5 (sinαsinx + cosαcos$x$¿$=2$, применим формулу косинус разности:

5cos (x – α) = 2, решим простейшее уравнение,

cos (x – α) =$\frac{2}{5}$,

x – α =≠ arccos $\frac{2}{5}$ + $2\pi n, n \in$z

α = arccos $\frac{4}{5}$ или α = arccos $\frac{3}{5}$, итак

x = arccos $\frac{4}{5}$ ±arccos $\frac{2}{5}$ + $2\pi n, n \in$z (при необходимости можно разбить решение на две серии)

Ответ: arccos $\frac{4}{5}$ ±arcos $\frac{2}{5}$ + $2\pi n, n \in$z

Решите самостоятельно уравнение, используя метод введения вспомогательного угла:

5	4sinx + cosx = 4	3б

Решение

$\sqrt{4^2+1^2} \times (\frac{4}{\sqrt{17}}$ sinx + $\frac{1}{\sqrt{17}}$ cosx) = 4

Ответ:

Проверьте свою работу у учителя (преподавателя)

Посчитайте баллы, набранные за верно выполненные задания.

Если вы получили:

4б, то вы находитесь на I уровне,

6б – на II уровне,

9б- на III уровне.

Если количество набранных баллов вас не устраивает, то прорешайте соответствующие задания корректирующего варианта, оцените работу и добавьте набранные баллы. Подсчитайте итоговое количество баллов, получите отметку.

Корректирующий вариант

1	$\sqrt{3}$ cosx - sin x = 1	1 балл

Решение

Ответ:

2	$\frac{\sqrt{2}}{2}$sin x- $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cosx = 1	1 балл

Решение

Ответ:

3	$\frac{\sqrt{3}}{2}$ cos$\frac{x}{2}$ - $\frac{1}{2}$ sin $\frac{x}{2}$ = 1	2 балла

Решение

Ответ:

4	sin 4x+ cos4x = 1	2 балла

Решение

Ответ:

5	4sin x- 3cosx = 5	3 балла

Решение

Ответ:

Дополнительное задание (оценивается отдельно)

1	$\sqrt{3}$sin 2x + cos2x =$\sqrt{2}$	2балла
2	3sin x+4cosx = 5	3 балла
3	2cos3x+$\sqrt{3}$ $\sin x$+cosx = 0	4 балла

Список литературы

Мордкович, А.Г., Математика 10 класс: Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень). А.Г. Мордкович, И.М. Смирнова, Л.О. Денисова – М: Мнемозина, 431с.

Мордкович, А. Г. Алгебра и начала анализа, 10-11кл.: Задачник. Базовый уровень/ А. Г. Мордкович, Л. О. Денищева, Т. А. Корешкова. - М. : Мнемозина,.

Глинсбург, В.И. Алгебра и начала анализа: учебник для 10 классов Контрольные работы (базовый уровень)/ -М: Мнемозина .

Мордкович, А. Г. Алгебра и начала анализа, 10-11 кл.: Контрольные работы/ А.Г.Мордкович, Е.Е. Тульчинская. -М: Мнемозина.

Мордкович, А. Г. Алгебра и начала анализа: учебник для 10- 11классов. М:Мнемозина.

Мордкович, А. Г. Алгебра и начала анализа, 10- 11класс: Методическое пособие для учителя. –М: Мнемозина.

Интернет ресурсы

1. Тригонометрия Учебное пособие. [Электронный ресурс]. / Режим доступа: http://sci/tspy.ru/SITES/posobie/trigon/test.htme

2.Тригонометрия .Компьютерный курс. [Электронный ресурс]. / Режим доступа:http://trigonometru-conrse.ru/

3.Решение простейших тригонометрических уравнений [Электронный ресурс]. / Режим доступа:WWW/2x2abc.com/algebra.files/test/test41.php.

4 .Решение тригонометрических уравнений (видео уроки) [Электронный ресурс]. / Режим доступа:WWWintellekt- video.com/4583/14-Algebra – 11 klass – Resenie – trigonometricheskikh-uravneniiy – I – neravenstv – onlain//