Применение производной к исследованию функций.

«Начала математического анализа» - единственный раздел, изучаемый в школе, который не относится к элементарной математике и дает учащимся средней школы не только получить представление о математическом анализе, но и научиться сознательно им пользоваться при решении ряда задач, не поддающихся элементарным методам.

Человек в повседневной деятельности постоянно сталкивается с решением задач, которые могут быть полностью описаны с помощью функций на математическом языке, а между тем производная инструментом для исследования функций. Одной из важнейших областей применения понятия производной являются экстремальные задачи. Однако производная может быть с успехом использоваться при решении и доказательстве различных уравнений и неравенств. С помощью производной можно производить также оценку числа корней того или иного уравнения. В связи с недостаточной разработкой данной темы в методическом плане эта тема интересует многих методистов в настоящее время. Кроме того, материал по данной теме интересен с точки зрения истории. Исследованием этой темы и ее занимались такие великие ученые, как Лейбниц и Ньютон – основоположники дифференциального исчисления. В связи с перечисленными выше фактами эта тема интересна и мне.

Изучение различных процессов и явлений реального мира часто приводит к задаче определения скорости этих процессов. Решение этой задачи подводит нас к понятию производной, которое является основным в дифференциальном исчислении.

Метод дифференциального исчисления был создан в XVII и XVIII вв. Как было сказано раннее, основу этому методу положили два великих математика - И. Ньютон и Г.В. Лейбниц. Ньютон пришёл к открытию дифференциального исчисления при решении задач о скорости движения материальной точки в данный момент времени (мгновенной скорости). Лейбниц пришёл к открытию дифференциального исчисления при решении задачи о построении касательной к любой кривой, заданной своим уравнением.

Существуют задачи, приводящие к понятию производной и в своей статье я хочу рассмотреть именно их.

1. О скорости движения материальной точки.

Пусть некоторая материальная точка совершает прямолинейное движение. В момент времени t1 точка находится в положении M1. В момент времени t2 в положении M2. Обозначим промежуток M1,M2 через S ; t2-t1= t. Величина S/ t называется средней скоростью движения. Чтобы найти мгновенную скорость точки в положении M1 необходимо t устремить к нулю. Математически это значит , что

$$V(t) = \lim_{\Delta t \to 0} V_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t},$$

Таким образом , для нахождения мгновенной скорости материальной точки необходимо вычислить предел отношения приращения функции S к приращению аргумента t при условии ,что t →0

2. Об угле наклона касательной к графику функции

Пусть $y(t)$ есть количество вещества прореагировавшего за время t. Спустя время Δt количество прореагировавшего вещества будет $y(t + \Delta t)$, т.е. за время Δt количество прореагировавшего вещества $\Delta y = y(t + \Delta t) - y(t)$. Поэтому средняя скорость химической реакции за интервал времени Δt будет равна $\frac{\Delta y}{\Delta t}$. Чтобы найти мгновенную скорость химической реакции в момент времени t надо устремить Δt к нулю, то есть

$$V(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} = y'(t).$$

Таким образом, производная от количества прореагировавшего вещества определяет мгновенную скорость химической реакции.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на промежутке X, точка $x_0 \in X$, дадим ей приращение $x_0 + \Delta x \in X$, величина Δx называется приращением аргумента. В каждой из этих точек посчитаем значение функции $f(x_0)$ и $f(x_0 + \Delta x)$. Тогда можно говорить о приращении функции $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Определение производной функции через предел

Пусть в некоторой окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}$ определена функция $f\colon U(x_0) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Производной функции f в точке x_0 называется предел, если он существует,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Общепринятые обозначения производной функции $y = f(x)$ в точке x_0

$$f'(x_0) = f'_x(x_0) = \mathrm{D}f(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = \dot{y}(x_0).$$

Заметим, что последнее обычно обозначает производную по времени (в теоретической механике).

Дифференцируемость

Производная $f'(x_0)$ функции f в точке x_0, будучи пределом, может не существовать или существовать и быть конечной или бесконечной. Функция f является дифференцируемой в точке x_0 тогда и только тогда, когда её производная в этой точке существует и конечна:

$$f \in \mathcal{D}(x_0) \Leftrightarrow \exists f'(x_0) \in (-\infty; \infty).$$

Для дифференцируемой в x_0 функции f в окрестности $U(x_0)$ справедливо представление

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \text{ при } x \to x_0.$$

Замечания

- Назовём $\Delta x = x - x_0$ приращением аргумента функции, а $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ приращением значения функции в точке x_0. Тогда

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

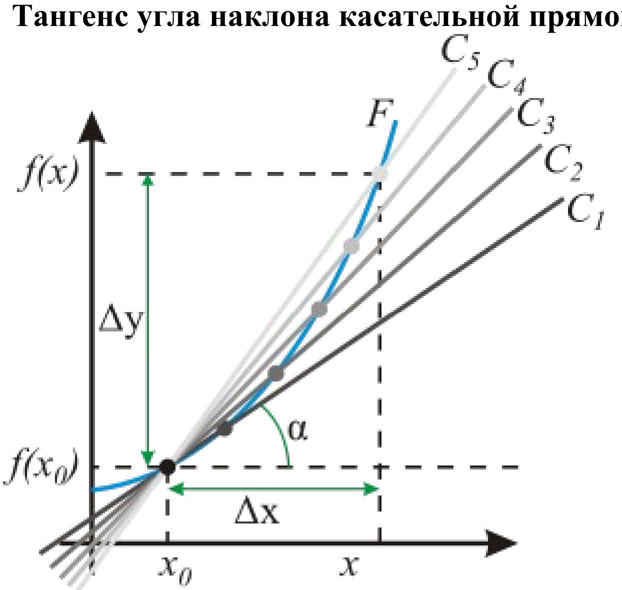
- Пусть функция $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ имеет конечную производную в каждой точке $x_0 \in (a,b)$. Тогда определена **произво́дная фу́нкция**

$$f'\colon (a,b) \to \mathbb{R}.$$

- Функция, имеющая конечную производную в точке, непрерывна в ней. Обратное не всегда верно.
- Если производная функция сама является непрерывной, то функцию f называют **непреры́вно дифференци́руемой** и пишут: $f \in C^{(1)}\big((a,b)\big)$.

Геометрический и физический смысл производной

Тангенс угла наклона касательной прямой



Геометрический смысл производной. На графике функции выбирается абсцисса x_0 и вычисляется соответствующая ордината $f(x_0)$. В окрестности точки x_0 выбирается произвольная точка x. Через соответствующие точки на графике функции F проводится секущая (первая светло-серая линия C_5). Расстояние $\Delta x = x - x_0$ устремляется к нулю, в результате секущая переходит в касательную (постепенно темнеющие линии C_5 — C_1). Тангенс угла α наклона этой касательной — и есть производная в точке x_0.

Если функция $f\colon U(x_0) \to \mathbb{R}$ имеет конечную производную в точке x_0, то в окрестности $U(x_0)$ её можно приблизить линейной функцией

$$f_l(x) \equiv f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Функция f_l называется касательной к f в точке x_0. Число $f'(x_0)$ является угловым коэффициентом или тангенсом угла наклона касательной прямой.

Скорость изменения функции

Пусть $s = s(t)$ — закон прямолинейного движения. Тогда $v(t_0) = s'(t_0)$ выражает мгновенную скорость движения в момент времени t_0. Вторая производная $a(t_0) = s''(t_0)$ выражает мгновенное ускорение в момент времени t_0.

Вообще производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 выражает скорость изменения функции в точке x_0, то есть скорость протекания процесса, описанного зависимостью $y = f(x)$.

Общая схема исследования функции.

I. 1. Область определения.

2. Точки пересечения с осями координат.

3. Четность.

4. Периодичность.

5. непрерывность.

6. Асимптоты.

II. 7. Монотонность.

8. Точки экстремума, экстремумы.

III. 9. Направления выпуклости.

10. Точки перегиба графика.

IV.11. Дополнительные точки.

12. Построение графика.

Возрастание и убывание функций.

Теорема (критерий монотонности дифференцируемой функции). Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке $< a, b >$ и дифференцируема во всех его внутренних точках. Тогда:

- для монотонного возрастания функции необходимо и достаточно, чтобы в (a, b) $f'(x) \geq 0$;

- для монотонного убывания функции необходимо и достаточно, чтобы в *(а,в)* 0;

- для постоянности функции необходимо и достаточно, чтобы в *(а,в)* $f'(x)$ =0.

Док-во. Докажем достаточность для возрастающей функции. Выберем произвольно точки $x_1 > x_2 \in X$. По теореме Лагранжа найдется точка $c \in [x_1, x_2]$, такая что . Т.к. оба множителя в правой части неотрицательны, то $f(x_1) - f(x_2) \geq 0$, т.е. $f(x_1) \geq f(x_2)$. Следовательно, функция является монотонно возрастающей.

Докажем необходимость для возрастающей функции. Пусть f*(x)* – монотонно возрастает. Тогда $\forall x \in (a, b)$ $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$, следовательно $f'(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ в *(а,в)*.

Для убывающей функции доказательства аналогичны.

Докажем необходимость для постоянной функции. Если *f(x)=const* в *(а,в),* то $f'(x) = 0$.

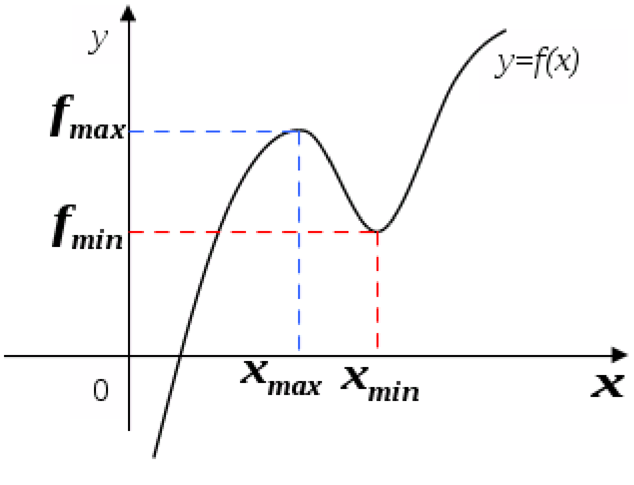
Докажем достаточность для постоянной функции. Пусть $f'(x) = 0$ в *(a,b)*. Тогда тем более $f'(x) \geq 0$ в *(a,b)*. Тогда по доказанному выше функция монотонно возрастает в *(a,b)*, т.е. $\forall x_1 < x_2 :$ $f(x_1) \leq f(x_2)$. С другой стороны, если $f'(x) = 0$ в *(a,b)*, то тем более $f'(x) \leq 0$ в *(a,b)*. Тогда по доказанному выше функция монотонно убывает в *(a,b)*, т.е. . Одновременное выполнение этих условий возможно лишь при $f(x_1) = f(x_2)$.▲

Экстремумы функции.

Пусть функция $y = f(x)$ задана на интервале (a, b).

Опр. Точка x_0 называется точкой локального максимума функции *f(x)*, если в некоторой ее окрестности выполняется условие: $f(x) \leq f(x_0)$.

Опр. Точка x_0 называется точкой локального минимума функции *f(x)*, если в некоторой ее окрестности выполняется условие: $f(x) \geq f(x_0)$.



Значения функции в точках локального минимума и максимума называют минимумом и максимумом функции. Минимум и максимум функции объединяют в понятие «экстремум функции»

(*extr f*).

Отметить отличия локального и глобального экстремумов.

Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.

При решении прикладных задач бывает нужно найти глобальные экстремумы функции на некотором промежутке. Если этот промежуток является отрезком, то экстремумы функция может достигать как в точках экстремума, так и на концах отрезка.

Пример. Найти наибольшее значение функции $y=\dfrac{x+1}{x^2+2x+2}$ на отрезке $[-1,2]$.

Решение. Данная функция является непрерывной на данном отрезке (т.к. знаменатель не обращается в нуль), а следовательно, может принимать экстремальные значения либо в точках экстремума, либо на концах отрезка. Вычислим производную:

. Тогда критическими точками являются точки *x=0* и *x=-2*. Данному отрезку принадлежит только точка *x=0*. Вычислим значения функции в точке экстремума и на концах отрезка:

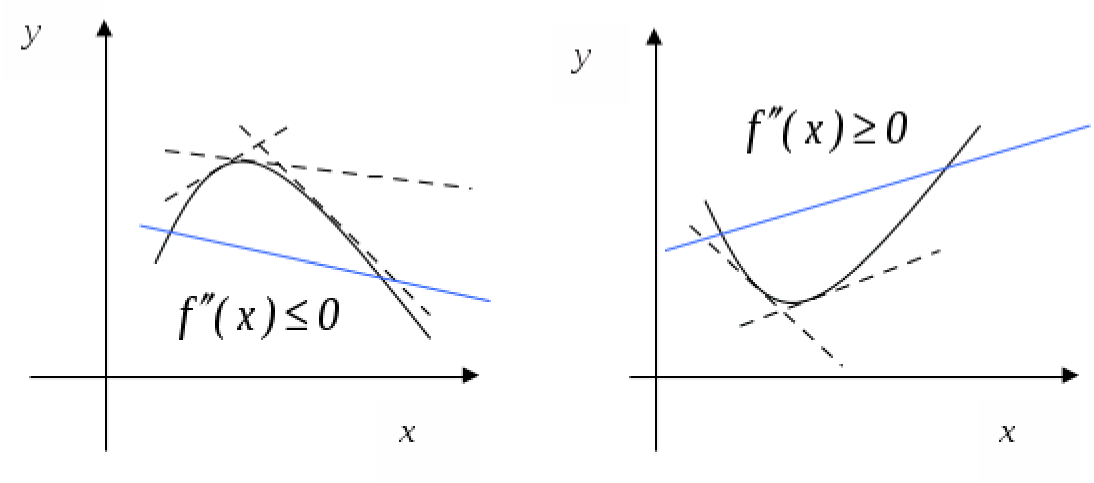
$f(0)=\dfrac{1}{2}$, $f(-1)=0$, $f(2)=0{,}3$. Сравнивая эти значения, заключаем, что наибольшее значение функции достигается в точке *x=0*.

Выпуклость функции. Точки перегиба.

Опр. Функция называется выпуклой вверх (выпуклой) на промежутке X, если

$\forall x_1, x_2 \in X: \quad f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right) \geq \dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$. График выпуклой на промежутке X функции расположен над любой ее секущей (и под любой ее касательной) на этом промежутке.

Аналогично вводится определение функции, выпуклой вниз (вогнутой).



выпуклая (вверх) вогнутая (выпуклая вниз)

Теорема (критерий выпуклости функции). Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в интервале *(а,в)*. Тогда для выпуклости функции вниз необходимо и достаточно, чтобы $f'(x)$ монотонно возрастала на этом интервале. Для выпуклости функции вверх необходимо и достаточно, чтобы $f'(x)$ монотонно убывала на этом интервале.

Следствие (достаточное условие выпуклости). Если вторая производная дважды дифференцируемой функции неотрицательна (неположительна) внутри некоторого промежутка, то функция выпукла вниз (вверх) на этом промежутке.

Опр. Точки, в которых график функции меняет направление выпуклости, называются точками перегиба графика функции.

Абсциссы точек перегиба являются точками экстремума первой производной.

Теорема (необходимое условие точки перегиба). Вторая производная дважды дифференцируемой функции в точке перегиба равна нулю: .

Абсциссы точек, в которых выполняется необходимое условие, называются *критическими точками второго рода*. Если перегиб графика есть, то только в таких точках.

Теорема (достаточное условие точки перегиба). Пусть $f(x)$ - дважды дифференцируема в интервале *(а,в)*. Тогда если вторая производная при переходе через критическую точку второго рода x_0 меняет знак, то точка (x_0, y_0) является точкой перегиба графика функции.

Замечание. Если смены знака второй производной не происходит, то перегиба графика в точке нет.

Пример. $y=\frac{x^3}{3}-x$, $y''=2x$; $y''=0 \Leftrightarrow x=0$ - точка перегиба.

Итак, чтобы найти интервалы выпуклости функции, нужно:

1. Найти вторую производную функции.

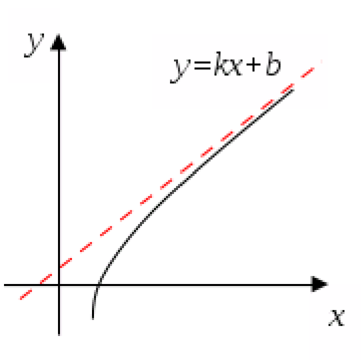
2. Найти точки, в которых $f''(x)=0$ или не существует.

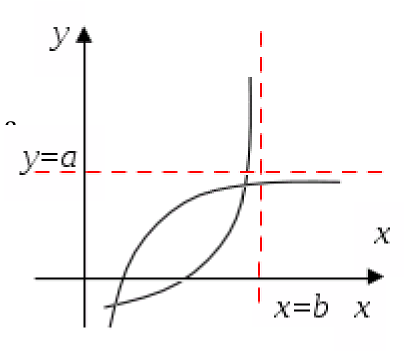
3. Исследовать знак второй производной слева и справа от найденных точек и сделать вывод о направлении выпуклости и точках перегиба на основании достаточных условий.

Асимптоты графика функции.

Графики некоторых функций расположены на плоскости так, что при неограниченном удалении от начала координат они неограниченно приближаются к некоторым прямым, но не пересекают их. Такие прямые называются асимптотами функции.

Асимптоты могут быть горизонтальными, вертикальными, наклонными.





Прямая *y=a* называется горизонтальной асимптотой к графику функции *y=f(x)*, если существует конечный предел $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a$.

Прямая *x=b* называется вертикальной асимптотой к графику функции *y=f(x)*, если существует конечный предел $\lim\limits_{x\to b} f(x)=\infty$.

Вертикальные асимптоты следует искать в точках разрыва функции или на концах области определения.

Если у функции нет горизонтальных асимптот, то, возможно, есть наклонные.

Наклонная асимптота к графику функции существует в том случае, когда существуют конечные числа *к* и *в*, вычисляемые по формулам:

$k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)$. Тогда наклонная асимптота задается уравнением $y=kx+b$. Если хотя бы одно из чисел $к$ и $в$ несобственное, то наклонных асимптот у графика функции нет.