Педагогический институт Тихоокеанского государственного университета»
Кафедра «Математики и информационных технологий»
Студент(ка) 5 курса
Лоскутова Любовь Константиновна

"Применение производной в науке и технике"

В первой части моей статьи речь пойдёт о понятии производной, правилах её применения, о геометрическом и физическом смысле производной. Во второй части, речь пойдёт о применении производной в науке и технике и о решении задач в этой области.

1. **Теоретическая часть**

1.1 Задачи, приводящие к понятию производной

При изучении тех или иных процессов и явлений часто возникает задача определения скорости этих процессов. Её решение приводит к понятию производной, являющемуся основным понятием дифференциального исчисления.

Метод дифференциального исчисления был создан в XVII и XVIII вв. С возникновением этого метода связаны имена двух великих математиков – И. Ньютона и Г.В. Лейбница.

Ньютон пришёл к открытию дифференциального исчисления при решении задач о скорости движения материальной точки в данный момент времени (мгновенной скорости).

Как известно, *равномерным движением* называют такое движение, при котором тело в равные промежутки времени проходит равные по длине отрезки пути. Путь, пройденный телом в единицу времени, называют *скоростью* равномерного движения.

Однако чаще всего на практике мы имеем дело с неравномерным движением. Автомобиль, едущий по дороге, замедляет движение у переходов и ускоряет его на тех участках, где путь свободен; самолёт снижает скорость при приземлении и т.д. Поэтому чаще всего нам приходится иметь дело с тем, что за равные отрезки времени тело проходит различные по длине отрезки пути. Такое движение называют *неравномерным.* Его скорость нельзя охарактеризовать одним числом.

Часто для характеристики неравномерного движения пользуются понятием *средней скорости* движения за время Δt, которое определяется соотношением где Δs – путь, пройденный телом за время Δt.

Так, при свободном падении тела средняя скорость его движения за первые две секунды есть

Практически такая характеристика движения, как средняя скорость, говорит о движении очень мало. Действительно, при 4,9 м/с, а за 2-ю – 14,7 м/с, в то время как средняя скорость за первые две секунды составляет 9,8 м/с. Средняя скорость в течение первых двух секунд не даёт никакого представления о том, как происходило движение: когда тело двигалось быстрее, а когда медленнее. Если же задать средние скорости движения для каждой секунды в отдельности, то мы будем знать, например, что во 2-ю секунду тело двигалось значительно быстрее, чем в 1-ю. Однако в большинстве случаев значительно быстрее, чем нас мало устраивает. Ведь нетрудно понять, что в течение этой 2-й секунды тело также движется по-разному: в начале медленнее, в конце быстрее. А как оно движется где-то в середине этой 2-й секунды? Иными словами, как определить мгновенную скорость?

Пусть движение тела описывается законом Рассмотрим путь, пройденный телом за время от t_0 до $t_0 + \Delta t$, т.е. за время, равное Δt. В момент t_0 телом пройден путь $f(t_0)$, в момент $t_0 + \Delta t$ – путь $f(t_0 + \Delta t)$. Поэтому за время Δt тело прошло путь $f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$ и средняя скорость движения тела за этот промежуток времени составит.

Чем меньше промежуток времени Δt, тем точнее можно установить, с какой скоростью движется тело в момент t_0, так как движущееся тело не может значительно изменить скорость за малый промежуток времени. Поэтому средняя скорость при стремлении Δt к нулю приближается к действительной скорости движения и в пределе даёт скорость движения v в данный момент времени t_0 (мгновенную скорость).

Таким образом**,**

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}.$$

Определение 1. *Мгновенная скорость* прямолинейного движения тела в данный момент времени t_0называется предел средней скорости за время от t_0 до $t_0 + \Delta t$, когда промежуток времени Δt стремится к нулю.

Итак, чтобы найти скорость прямолинейного неравномерного движения в данный момент, нужно найти предел отношения приращения пути $\Delta s = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$ к приращению времени Δt при условии $\Delta t \to 0$, т.е. Лейбниц пришёл к открытию дифференциального исчисления при решении задачи о построении касательной к любой кривой, заданной своим уравнением.

Решение этой задачи имеет большое значение. Ведь скорость движущейся точки направлена по касательной к её траектории, поэтому определение скорости снаряда на его траектории, скорости любой планеты на её орбите сводится, к определению направления касательной к кривой.

Определение касательной как прямой, имеющей с кривой только одну общую точку, справедливое для окружности, непригодно для многих других кривых.

Ниже представленное определение касательной к кривой, не только соответствует интуитивному представлению о ней, но и позволяет фактически находить её направление, т.е. вычислять угловой коэффициент касательной.

Определение 2. *Касательной* к кривой в точке М называется прямая МТ, которая является предельным положением секущей MM_1, когда точка M_1, перемещаясь по кривой, неограниченно приближается к точке М.

1.2 Определение производной

Заметим, что при определении касательной к кривой и мгновенной скорости неравномерного движения, по существу, выполняются одни и те же математические операции:

1. Заданному значению аргумента дают приращение и вычисляют новое значение функции, соответствующее новому значению аргумента.
2. Определяют приращение функции, соответствующее выбранному приращению аргумента.
3. Приращение функции делят на приращение аргумента.
4. Вычисляют предел этого отношения при условии, что приращение аргумента стремится к нулю.

К предельным переходам такого типа приводят решения многих задач. Возникают необходимость сделать обобщение и дать название этому предельному переходу.

Скорость изменения функции в зависимости от изменения аргумента можно, очевидно, охарактеризовать отношением $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Это отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ называется *средней скоростью* изменения функции на отрезке от x до $x + \Delta x$. Сейчас нужно рассмотреть предел дроби $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0.$ Предел этого отношения при стремлении приращения аргумента Δx к нулю (если этот предел существует) представляет собой некоторую новую функцию от x . Эту функцию обозначают символами y’, $f'(x), y'_x$ или $\frac{dy}{dx}$ и называют *производной* данной функции $y = f(x),$ так как она получена (произведена) из функции $y = f(x).$ Сама же функция $y = f(x)$ называется *первообразной* функцией по отношению к своей производной $y' = f'(x).$

Определение 3. *Производной* функции $y = f(x)$ в данной точке x называют предел отношения приращения функции Δy к соответствующему приращению аргумента Δx при условии, что Δx→0, т.е.

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

1.3 Общее правило нахождения производной

Операцию отыскания производной некоторой функции называют *дифференцированием* функции, а раздел математики, изучающий свойства этой операции, – *дифференциальным исчислением.*

Если функция имеет производную в точке x=a, то говорят, что она *дифференцируема* в этой точке. Если функция имеет производную в каждой точке данного промежутка, то говорят, что она *дифференцируема* на этом *промежутке*.

Определение производной не только с исчерпывающей полнотой характеризует понятие скорости изменения функции при изменении аргумента, но и даёт способ фактического вычисления производной данной функции. Для этого необходимо выполнить следующие четыре действия (четыре шага), указанные в самом определении производной:

1. Находят новое значение функции, представив в данную функцию вместо x новое значение аргумента $x + \Delta x$: $y_н = f(x + \Delta x) = y + \Delta y$.
2. Определяют приращение функции, вычитывая данное значение функции из её нового значения: $\Delta y = y_н - y = f(x + \Delta x) - f(x)$.
3. Составляют отношение приращения функции к приращению аргумента: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.
4. Переходят к пределу при $\Delta x \to 0$ и находят производную: $y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

Вообще говоря, производная – это «новая» функция, произведённая от данной функции по указанному правилу.

1.4 Геометрический смысл производной

Геометрическая интерпретация производной, впервые данная в конце XVII в. Лейбницем, состоит в следующем: *значение производной функции* $y = f(x)$ *в точке x равно угловому коэффициенту касательной, проведённой к графику функции в той же точке x,* т.е. $k = f'(x) - tg\varphi.$

Уравнение касательной, как всякой прямой, проходящей через данную точку в данном направлении, имеет вид $y - y_0 = k(x - x_0)$, где x и y – текущие координаты. Но $k = y' = f'(x_0)$ и уравнение касательной запишется так: $y - y_0 = y'(x - x_0)$. Уравнение нормали запишется в виде $y - y_0 = -\frac{1}{y'(x - x_0)}$.

1.5 Механический смысл производной

Механическое истолкование производной было впервые дано И. Ньютоном. Оно заключается в следующем: скорость движения материальной точки в данный момент времени равна производной пути по времени, т.е. $v = \frac{ds}{dt}$. Таким образом, если закон движения материальной точки задан уравнением $s = f(t)$, то для нахождения мгновенной скорости точки в какой-нибудь определённый момент времени нужно найти производную $s' = f'(t)$ и подставить в неё соответствующее значение t.

1.6 Производная второго порядка и её механический смысл

Получим (уравнение из проделанного в учебнике Лисичкин В.Т. Соловейчик И.Л. «математика» с. 240):

Таким образом, *ускорение прямолинейного движения тела в данный момент равно второй производной пути по времени, вычисленной для данного момента.* В этом и заключается механический смысл второй производной.

1.7 Определение и геометрический смысл дифференциала

Определение 4. Главная часть приращения функции, линейная относительно приращения функции, линейная относительно приращения независимой переменой, называется *дифференциалом* функции и обозначается знаком d, т.е. $dy = y'\Delta x$.

Дифференциал функции $y = f(x)$ геометрически изображается приращением ординаты касательной, проведённой в точке М (х; у) при данных значениях х и Δх.

Вычисление дифференциала – $dy = y'dx$.

Применение дифференциала в приближённых вычислениях – $\Delta y \approx dy$, приближённое значение приращения функции совпадает с её дифференциалом. $f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy.$

Теорема 1. *Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) в данном интервале, то производная этой функции не отрицательна (не положительна) в этом интервале.*

Теорема 2. *Если производная функция $y = f(x)$ положительна (отрицательна) в не котором интервале, то функция в этом интервале монотонно возрастает (монотонно убывает).*

Сформулируем теперь правило нахождения интервалов монотонности функции $f(x)$.

1. Вычисляют производную данной функции.
2. Находят точки, в которых равна нулю или не существует. Эти точки называются *критическими* для функции $f(x)$.
3. Найденными точками область определения функции $f(x)$ разбивается на интервалы, на каждом из которых производная сохраняет свой знак. Эти интервалы являются интервалами монотонности.

4. Исследуют знак на каждом из найденных интервалов. Если на рассматриваемом интервале $f'(x) > 0$, то на этом интервале $f(x)$ возрастает; если же $f'(x) < 0$, то на таком интервале $f(x)$ убывает.

В зависимости от условий задачи правило нахождения интервалов монотонности может упрощаться.

Определение 5. Точка называется точкой максимума (минимума) функции $f(x)$, если имеет место неравенство $f(a) > f(x)$ соответственно $f(a) < f(x))$ для любого x из не которой окрестности точки .

Если – точка максимума (минимума) функции $f(x)$, то говорят, что $f(x)$ имеет максимум *(минимум)* в точке . Максимум и минимум функции объединяют название *экстремум* функции, а точки максимума и минимума называют *точками экстремума (экстремальными точками).*

Теорема 3. (необходимый признак экстремума). *Если является точкой экстремума функции* $y = f(x)$ *и производная в этой точке существует, то она равна нулю:* $f'(a) = 0$.

Теорема 4. (достаточный признак экстремума). *Если производная* $f'(x)$ *при переходе x через a меняет знак, то a является точкой экстремума функции* $f(x)$.

Основные моменты исследования производной:

1. Находят производную .
2. Находят все критические точки из области определения функции.
3. Устанавливают знаки производной функции при переходе через критические точки и выписывают точки экстремума.
4. Вычисляют значения функции $f(x)$ в каждой экстремальной точке.

2. **Исследование функций с помощью производной**

<u>*Задача №1*</u>. *Объём бревна.* Круглым деловым лесом называют брёвна правильной формы без дефектов древесины с относительно небольшой разницей $\left(\frac{D}{d} < 2\right)$ диаметров толстого (D) и тонкого (d) концов. При определении объёмов круглого делового леса обычно применяют упрощённую формулу $V = lS$, где l – длина бревна, S – площадь его среднего сечения. Выясните, завершается или занижается при этом реальный объём; оцените относительную погрешность.

Решение. Форма круглого делового леса близка к усечённому конусу. Пусть R – радиус большего, r – меньшего конца бревна. Тогда его почти точный объём (объём усеченного конуса) можно, как известно, найти по формуле $V=\frac{1}{3}\pi l(r^2+R^2+rR)$. Пусть V_1 – значение объёма, вычисленное по упрощённой формуле. Тогда $V_1=\pi l\left(\frac{R+r}{2}\right)^2$;

$\Delta V=V-V_1=\frac{\pi l}{12}(R-r)^2>0$, т.е. $V>V_1$. Значит, упрощённая формула даёт занижение величины объёма. Положим теперь . Тогда $f(x)=\frac{\Delta V}{V_1}=\frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$. Отсюда видно, что относительная погрешность не зависит от длины бревна, а определяется отношением $\frac{R}{r}$. Поскольку $f'(x)>0$ при $x>1$, то функция f возрастает на промежутке [1; 2]. Поэтому $\frac{\Delta V}{V_1}<f(2)=\frac{1}{27}$, а значит, относительная погрешность не превосходит 3,7%. В практике лесоведения такая погрешность считается вполне допустимой. С большей точностью практически невозможно измерить ни диаметры торцов (ведь они несколько отличаются от кругов), ни длину бревна, поскольку измеряют не высоту, а образующую конуса (длина бревна в десятки раз больше диаметра, и это не приводит к большим погрешностям). Таким образом, на первый взгляд неправильная, но более простая формула для объёма усечённого конуса в реальной ситуации оказывается вполне правомерной. Многократно проводившиеся с помощью специальных методов проверки показали, что при массовом учёте делового леса относительная погрешность при использовании рассматриваемой формулы не превосходит 4%.

Задача №2. При определении объёмов ям, траншей вёдер и других ёмкостей, имеющих форму усечённого конуса, в с/х практике иногда пользуются упрощённой формулой , где h – высота, s и S – площади оснований конуса. Выясните, завышается или занижается при этом реальный объём, оцените относительную погрешность при естественном для практики условии: $\frac{P}{r}<2$ (R и r – радиусы оснований, $R>r$) .

Решение. Обозначив через V истинное значение объёма усечённого конуса, а через V_1 значение, вычисленное по упрощённой формуле, получим: $V_1=\frac{1}{2}\pi h(r^2+R^2)$; $\Delta V=V_1-V=\frac{\pi h}{6}(R-r)^2>0$, т.е. . Значит, упрощённая формула даёт завышение величины объёма. Повторив далее решение предыдущей задачи, найдём, что относительная погрешность будет не больше 6,7%. Вероятно, такая точность допустима при нормировании землеройных работ – ведь ямы не будут идеальными конусами, да и соответствующие параметры в реальных условиях замеряют весьма грубо.

<u>*Задача №3*</u>. В специальной литературе для определения угла β поворота шпинделя фрезерного станка при фрезеровании муфт с x зубьями выводится формула , где $\alpha = \frac{\pi}{x}$. Так как эта формула сложна, то рекомендуется отбросить её знаменатель и пользоваться упрощённой формулой $\cos\beta = \sin\frac{\pi}{x}$. При каких x (x – целое число, $8 \le x \le 50$) можно пользоваться этой формулой, если при определении угла β допускается погрешность в $30'$?

Решение. Точную формулу после несложных тождественных преобразований можно привести к виду $\cos\beta = tg\frac{\pi}{x}$. Поэтому при использовании приближённой формулы допускается абсолютная погрешность $\delta(x) = |y(x)|$, где $y(x) = arc\cos\sin\frac{\pi}{x} - arc\cos tg\frac{\pi}{x}$. Исследуем функцию $y(x)$ на отрезке [8; 50]. При этом 0,06, т.е. угол $\frac{\pi}{x}$ принадлежит первой четверти. Имеем: $y'(x) = \frac{\pi}{x^2}\left(1 - \frac{1}{\cos\frac{\pi}{x}\sqrt{\cos\frac{2\pi}{x}}}\right)$. Заметим, что $y'(x) < 0$ на рассматриваемом промежутке, а значит, функция $y(x)$ на этом промежутке убывает. Поскольку далее $y(50) > 1{,}5080 - 1{,}5078 > 0$,то $y(x) > 0$ при всех рассматриваемых x . Значит, $\delta(x) = y(x)$. Так как $30' \approx 0{,}0087$ радиан, то достаточно решить неравенство $y(x) < 0{,}009$. Решая это неравенство подбором, находим, что $y(12) \approx 0{,}0095$, $y(13) \approx 0{,}0073$. В силу того, что функция $y(x)$ убывает, следует, что $x \ge 13$.

Вывод:

Применение производной довольно широко, и его можно полностью охватить в работе такого типа, однако я попыталась раскрыть основные базовые моменты. В наше время, в связь с научно-техническим прогрессом, в частности с быстрой эволюцией вычислительных систем, дифференциальное исчисление становиться всё более актуальными в решении как простых, так и сверхсложных задач.

Литература

1. В.А. Петров «Математический анализ в производственных задачках»
2. Соловейчик И.Л., Лисичкин В.Т. «Математика»