Хорунжая Альбина Валентиновна
учитель математики
МАОУ ОУ Лицей №11 г. Красноярск
Класс: 9

Авторская разработка

Правила и алгоритмы построения графиков функций, содержащих знак модуля

Введение

Мною была разработана и апробирована программа элективного курса «В мире абсолютной величины». Программа курса адресована учащимся 9 класса, имеющим интерес к изучению математики, которые хотят глубже познакомиться с её методами и идеями самостоятельно и под руководством учителя и ориентированным на изучение математики в 10-11 классах на профильном уровне. Программа, рассчитанная на 16 часов, включает обобщение и систематизацию знаний по теме «Модуль», свойства модуля, решение уравнений и неравенств, содержащих знак модуля, исследование и построение графиков функций и зависимостей, содержащих знак модуля.

В процессе апробации данного курса были использованы различные методы активизации познавательной деятельности учащихся, обеспечивающие личностное развитие каждого ученика в процессе самостоятельного построения ими новых знаний и развитие их коммуникативных компетенций.

Для воплощения целей и задач курса применялись эвристические технологии, обучение в сотрудничестве, дифференцированное обучение и работу учащихся в мини- группах, включающие школьников в активную учебно-познавательную деятельность.

Учащиеся показали умение применять определение, свойства абсолютной величины (модуля) к решению конкретных задач: строить графики функций и зависимостей, содержащих знак модуля; решать уравнения и неравенства, содержащие переменную под знаком модуля.

Учащиеся получили опыт учебного математического исследования по созданию «Памятки правил и алгоритмов построения графиков функций, аналитическое выражение которых содержит знак абсолютной величины», осуществляли самостоятельный поиск новых знаний, выдвигали предположения, устанавливали закономерности, делали аргументированные выводы.

В результате учащимся удалось сделать правильные выводы и сформулировать правила и алгоритмы построения графиков функций $y = |f(x)|$, $y = f(|x|)$, $y = |f(|x|)|$.

На заключительном занятии учащиеся наглядно продемонстрировали знание правил и умение применять алгоритмы построения графиков функций, представив результаты своей работы в виде презентаций и буклетов, выполненных с помощью программы Publisher.

Методическая разработка

Графики являются средством увидеть формулы и функции и проследить, каким образом эти функции меняются. Часто построение графиков связано с исследованием поведения функций. В ряде случаев графики облегчают нахождение решений уравнений и неравенств, сокращая и упрощая аналитические выкладки, и часто при этом являются единственным методом решения таких задач. Когда в уравнения прямых, парабол, гипербол включают знак модуля, их графики становятся необычными и красивыми.

При построении графиков функций, содержащих знак модуля, применяются, в основном, те же приемы, что при решении уравнений с модулем. Основным действием при этом является «снятие модуля». Однако при построении графиков эта операция иногда даже упрощается, так как она может быть заменена геометрическими преобразованиями графиков.

Учебное математическое исследование

«Построение графиков функций вида $y = |f(x)|$, $y = f(|x|)$, $y = |f(|x|)|$»

Задания

1. Проанализировать фонд информации.

Сгруппировать (классифицировать) функции.

1) $y = |-2x+1|$.

2) $y = 2x^2 - 3|x| - 2$

3) $|y| = -3x + 2$

4) $y = |4|x| - x^2 - 3|$

5) $|y| = |x^2 + 2x|$

6) $y = 3|x| - 2$

7) $|y| = \frac{1}{3}x + 1$

8) $|y| = -x^2 + 3$

9) $y = |x^3|$

10) $y = |x^2 - 4|x||$

11) $y = 3|x| - 2x^2 + 2$

12) $|y| = |-2x+1|$

13) $y = ||x| - 3|$

14) $y = \sqrt{|x|}$

15) $y = \left|-\frac{2}{x}\right|$

16) $y = |x^2 - 2|x||$

17) $y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}|x| - 1$

18) $|y| = 2x^2 - 3x - 2$

19) $y = |x^2 - 3|$

20) $y = -\frac{3}{|x|}$

21) $y = |4x - x^2 - 3|$

2. Составить модели для исследования – общий вид формул.

Функции:		
$y = f(\lvert x\rvert)$	$y = \lvert f(x)\rvert$	$y = \lvert f(\lvert x\rvert)\rvert$

3. Исследовать функции. Задачи:

- научиться строить графики функций, аналитическое выражение которых содержит знак абсолютной величины;
- сформулировать правило (составить алгоритм) построения графиков функций, содержащих знак абсолютной величины.

Задания учебного исследования.

1) Построить графики функций по координатам точек.

Функции:		
$y = f(\|x\|)$	$y = \|f(x)\|$	$y = \|f(\|x\|)\|$
а) $y = \|x\|$	а) $y = \|-2x+1\|$.	а) $y = \|\|x\|-3\|$
б) $y = 3\|x\|-2$	б) $y = \|x^2-3\|$	б) $y = \|4\|x\|-x^2-3\|$
в) $y = -2\|x\|+1$	в) $y = \|4x-x^2-3\|$	в) $y = \|x^2-2\|x\|\|$
г) $y = 2x^2-3\|x\|-2$	г) $y = \left\|-\frac{2}{x}\right\|$	г) $y = \|x^2-4\|x\|\|$
д) $y = -\frac{3}{\|x\|}$	д) $y = \|x^3\|$	
е) $y = \sqrt{\|x\|}$		

2) Сравнить получившиеся графики. Чем они похожи?

Обратить внимание на повторяющиеся закономерности

3) Сформулировать гипотезу.

4) Проверить гипотезу на дополнительном фонде.

5) Сформулировать гипотезу, как правило (алгоритм) построения графика функции.

6). Выбрать дальнейший путь исследований.

Возможны следующие направления работы:

- увеличивать фонд за счет добавления более сложных функций;
- модуль и симметрия

7). Применить новую модель.

Составить задачи, для решения которых можно использовать найденные правила.

8). Представить результаты исследования.

Оформить отчет по исследовательской работе в виде компьютерной презентации, реферата.

Отчет первой группы

1. Построение графика функции y = *f* (|x|).

$$y = f(|x|) = \begin{cases} f(x), \text{ если } x \ge 0, \\ f(-x), \text{ если } x < 0 \end{cases}$$

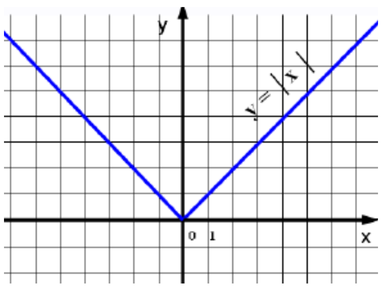
Следовательно, график функции y = *f* (| x |) состоит из двух графиков:

y = *f* (x) – в правой полуплоскости, y = *f* (-x) – в левой полуплоскости.

Функция y = f(|x|) – чётная, поэтому для построения её графика достаточно построить график функции y = f(x) для всех x $\geq$ 0 из области определения и отразить полученную часть симметрично оси координат.

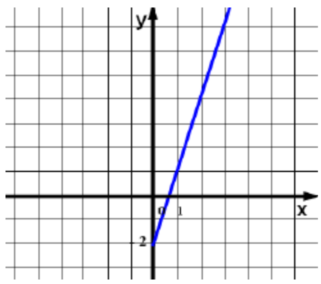
Знание этого правила облегчает построение графиков функций y = f(|x|).

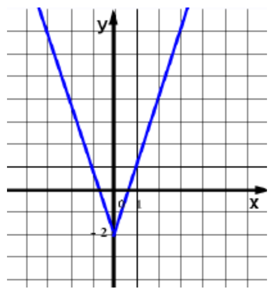
а) Построение графика функции $y = |x|$**.**



1.При x > 0 имеем y = x, графиком в этом случае является биссектриса первого координатного угла.
2.При x=0, y=0.
3.Левую часть графика функции $y = |x|$ получим, построив для $x \le 0$ луч, симметричный уже построенному относительно оси y.

б) Построение графика функции $y = 3|x| - 2$**.**





1. Строим график функции $y = 3x - 2$ для $x \ge 0$.

x	0	$\frac{2}{3}$
y	-2	0

2. Достраиваем левую часть графика, симметричную правой относительно оси ординат.

в) Построение графика функции $y = 2x^2 - 3|x| - 2$.

Так как $x^2 = |x|^2$, то данная функция имеет вид $y = 2|x|^2 - 3|x| - 2$.

1. Строим график функции $y = 2x^2 - 3x - 2$ для $x \ge 0$.

Графиком функции $y = 2x^2 - 3x - 2$ является парабола, вершина которой $x_B = \frac{-в}{2a}$.

$$x_B = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

$$y_B = 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{4} - 2 = 2 \cdot \frac{9}{16} - \frac{9}{4} - 2 = \frac{9}{8} - \frac{9}{4} - 2 = \frac{9}{8} - \frac{18}{8} - 2 = -\frac{9}{8} - 2 = -1\frac{1}{8} - 2 = -3\frac{1}{8}.$$

Трёхчлен имеет 2 различных корня:

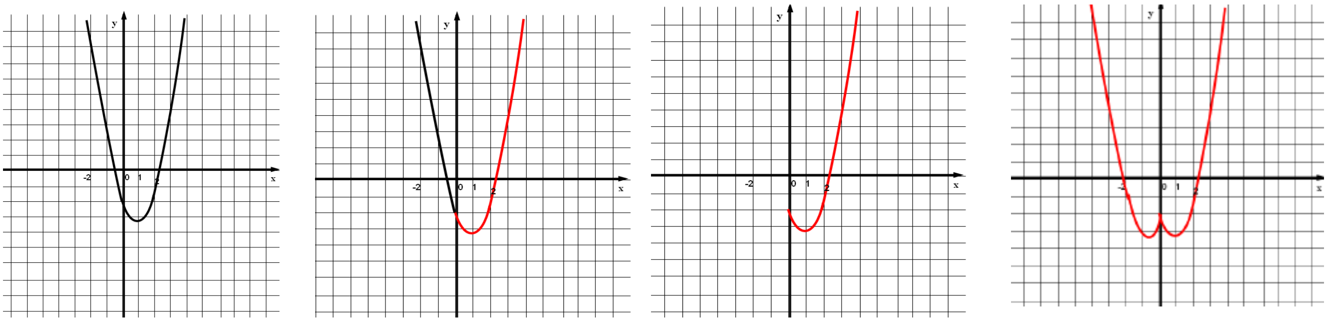
$$2x^2-3x-2=0$$
$$D=9+16=25$$
$$D>0,$$
$$x_1=\frac{3-5}{4}=-\frac{1}{2};\ x_2=\frac{3+5}{4}=2.$$

Если x=0, то y = -2.

x	$\frac{1}{3}$	1	3	6
y	-9	-3	-1	$-\frac{1}{2}$

Ветви параболы направлены вверх.

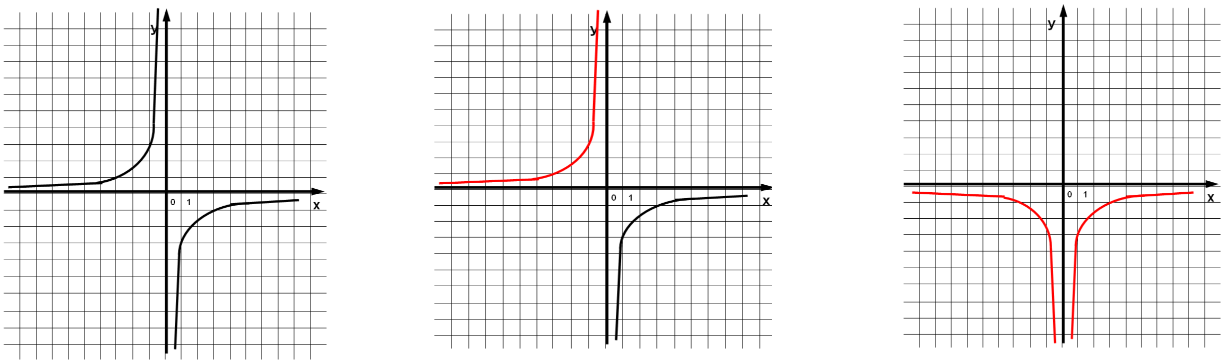
2. Левую часть графика достраиваем симметрично построенной правой относительно оси ординат.



г) Построение графика функции $y=-\frac{3}{|x|}$

1.Строим график $y=-\frac{3}{x}$ (гиперболу) для всех $x>0$

2.Левую часть графика достраиваем симметрично правой относительно оси ОУ.

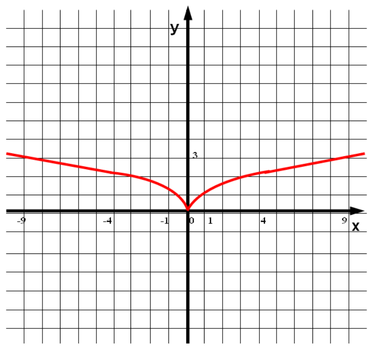


д) Построение графика функции $y=\sqrt{|x|}$.

1.Строим график функции $y=\sqrt{x}$ для $x\geq 0$.

x	0	1	4	9
y	0	1	2	3

2.Левую часть графика достраиваем симметрично правой относительно ОУ.



Графическое решение уравнений, содержащих знак абсолютной величины.

Уравнения вида | f(x) | = g(x)

Чтобы графически решить уравнение указанного вида, нужно:

1. Ввести две функции y = | f(x)| и y = g(x)
2. Построить график функции y = |f(x)|
3. Построить график функции y = g(x)
4. Найти точки пересечения построенных графиков
5. Выписать абсциссы найденных точек – это искомые корни уравнения |f(x)|= g(x)

Решить уравнение | x - 1| + 2x – 5 = 0

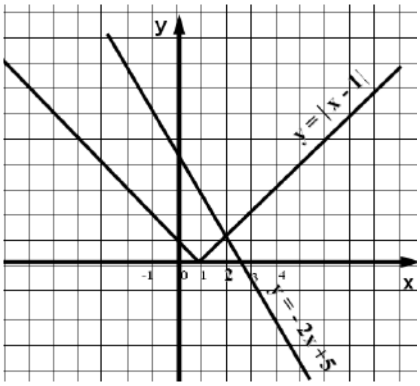
Решение.

Представим уравнение в виде :| x - 1| = - 2x +5

Строим два графика y = | x - 1| и y = - 2x +5

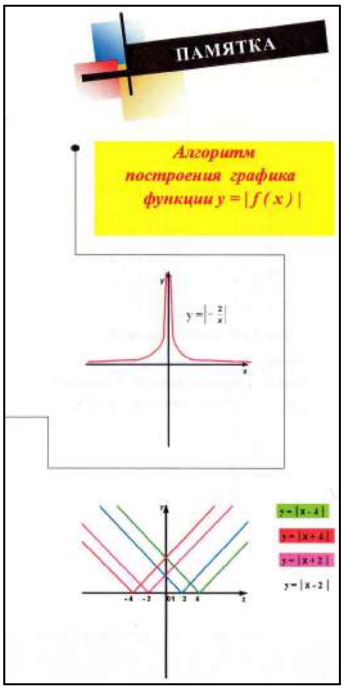
Графики функций пересекаются в одной точке,

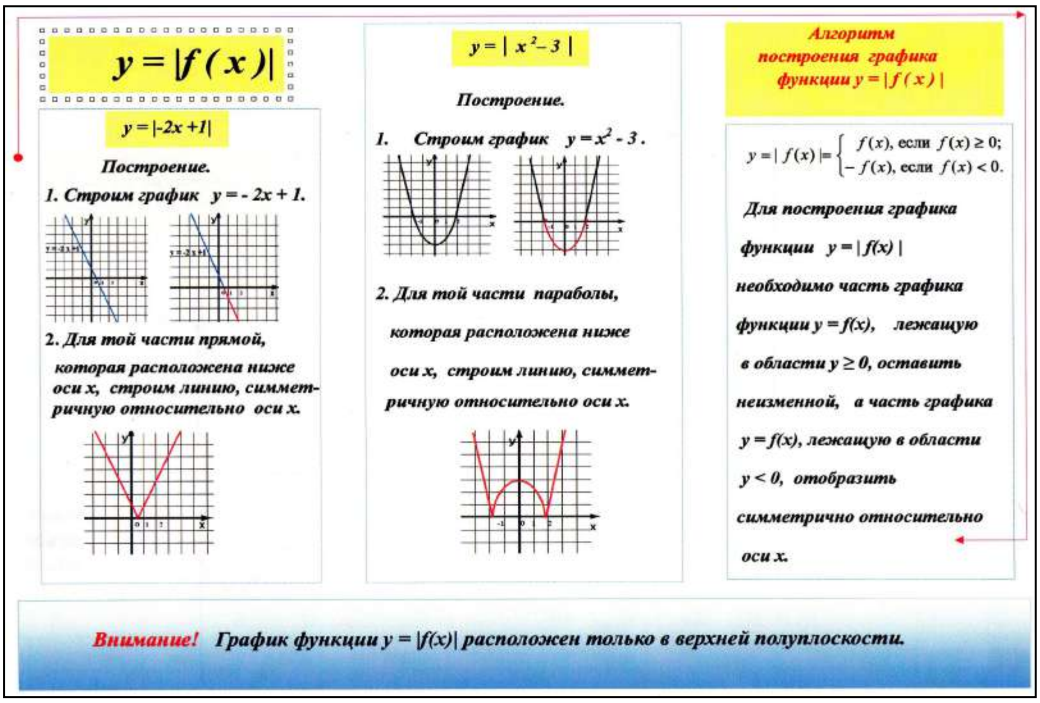
у которой x = 1, значит, уравнение имеет одно решение.



Ответ: 2

Макет буклета первой группы





Отчет второй группы

2. Построение графика y = |*f* (x)|

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), \text{ если } f(x) \geq 0, \\ -f(x), \text{ если } f(x) < 0 \end{cases}$$

Для построения графика функции y = |f(x)| для всех x из области определения, надо ту часть графика функции y = f(x), которая располагается ниже оси абсцисс (f(x) < 0), отразить симметрично этой оси. Таким образом, график функции y = |*f*(x)| расположен только в верхней полуплоскости.

Алгоритм построения графика вида y = | *f* (x) |

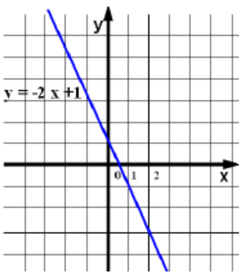
1. Строим график функции y = *f* (x).
2. Часть графика, для которой значения функции положительны, оставляем без изменения.
3. Для той части графика, которая ***располагается ниже оси абсцисс (f(x) < 0), строим симметричную относительно оси x.***

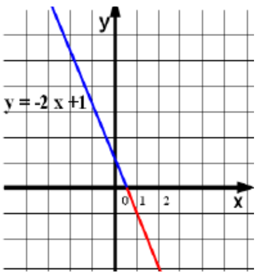
а) Построение графика функции $y = |-2x + 1|$.

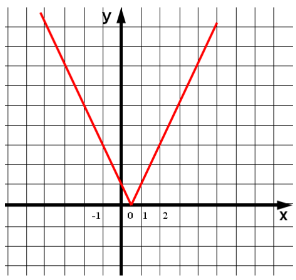
1. Строим график $y = -2x + 1$.

x	0	$\frac{1}{2}$
y	1	0

2. Для той части прямой $y = -2x + 1$, которая расположена ниже оси ОХ, строим линию, симметричную относительно оси ОХ.





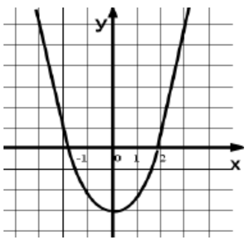


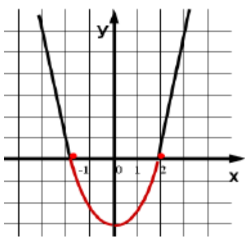
б) Построение графика $y = |x^2 - 3|$

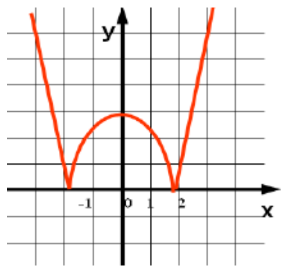
1. Строим график функции $y = x^2 - 3$

   а) (0; - 3)-вершина параболы; б) $\left[\begin{array}{l} x_1 = -\sqrt{3} \\ x_2 = \sqrt{3} \end{array}\right.$ -нули функции в) y(0)=-3

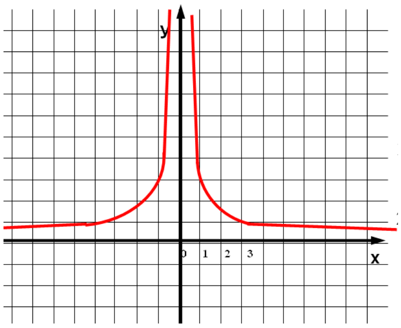
2. Нижнюю часть графика $y = x^2 - 3$ отражаем симметрично относительно оси абсцисс.







в) **Построение графика** $y = \left| -\frac{2}{x} \right|$



1. Строим график функции $y = -\frac{2}{x}$

x	0,5	1	2	4
y	-4	-2	-1	-0,5

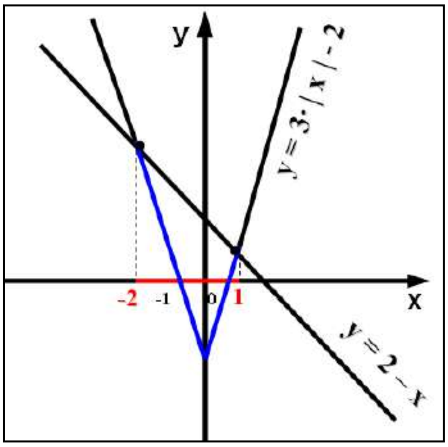
2. Для той части графика, которая оказалась ниже оси ОХ, построим симметричную относительно оси ОХ.

Графическое решение неравенств, содержащих знак абсолютной величины.

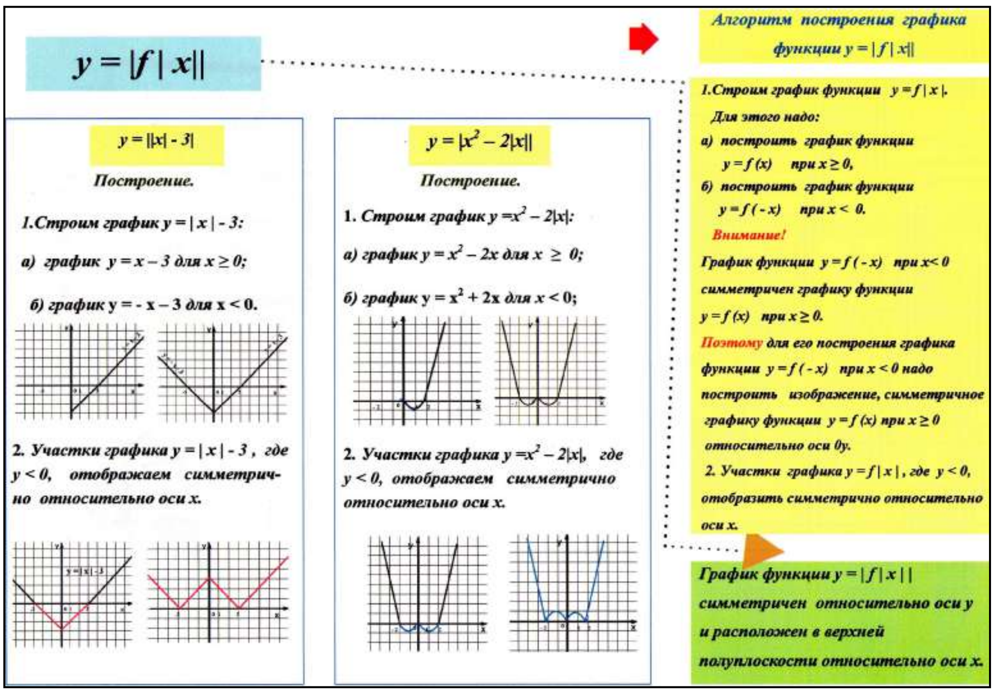
Решить неравенство 3 · | x | – 2 < 2 – x

Строим два графика y = 3 · | x | - 2 и y = 2 – x

Ответ: (-2; 1)



Макет буклета второй группы



Отчет третьей группы

3. Построение графика y = |*f* (|x|)|

Для того, чтобы построить график функции y = |*f*(|x|), надо сначала построить график функции y = *f*(x) при x ≥ 0, затем при x < 0 построить изображение, симметричное относительно оси 0y, а затем на интервалах, где *f*(|x|) < 0, построить изображение, симметричное графику *f*(|x|) относительно оси 0x.

Учитывая вышесказанное о построении графиков $y = f(|x|)$ и $y = |f(x)|$, составим план построения графика $y = |f(|x|)|$:

1. строим график функции $y = f(x)$ для $x \geq 0$
2. строим график функции $y = f(x)$ для x < 0, т. е строим линию графика, симметричную построенной относительно оси ОУ.
3. ту часть графика, которая окажется расположенной в нижней полуплоскости, отображаем относительно оси ОХ.

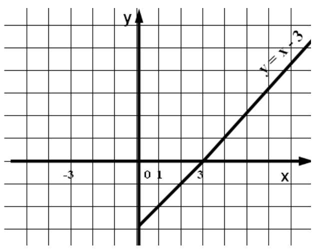
а) Построение графика $y = ||x| - 3|$

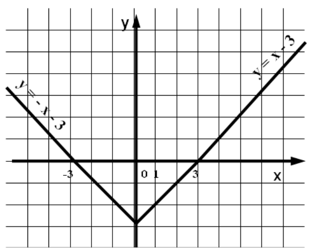
1. Строим график функции $y = x - 3$ для $x \geq 0$

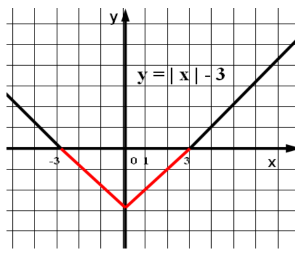
x	0	3
y	-3	0

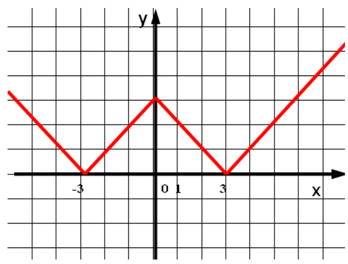
2.Достроим для x < 0 часть графика симметрично построенному относительно оси ОУ.

3. Для той части графика, которая оказалась ниже оси ОХ, построим симметричную относительно оси ОХ.









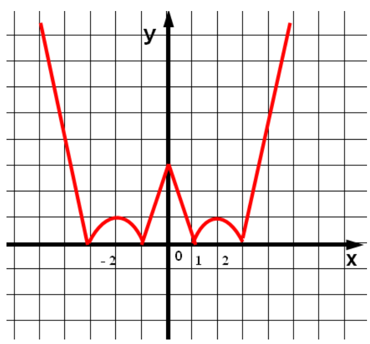
б) Построение графика $y = |4|x| - x^2 - 3|$

1.Строим график функции $y = -x^2 + 4x - 3$

а) ($x_в$;$y_в$)=(2;1)-вершины параболы

б) $\left[\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \end{array}\right.$-нули функции

в) при x=0, y=-3



2. Для x < 0 достроим часть графика симметрично построенному относительно OY.

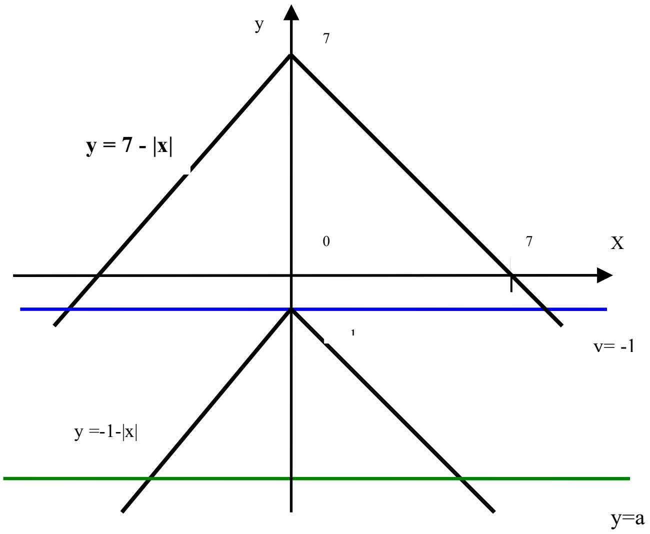
3. Для той части графика, которая оказалась ниже оси ОХ, построим симметричную относительно оси ОХ.

Графический способ решения задачи с параметром

Найдите все значения а, при каждом из которых уравнение
| | x | - 3 + a | = 4 имеет ровно три корня.

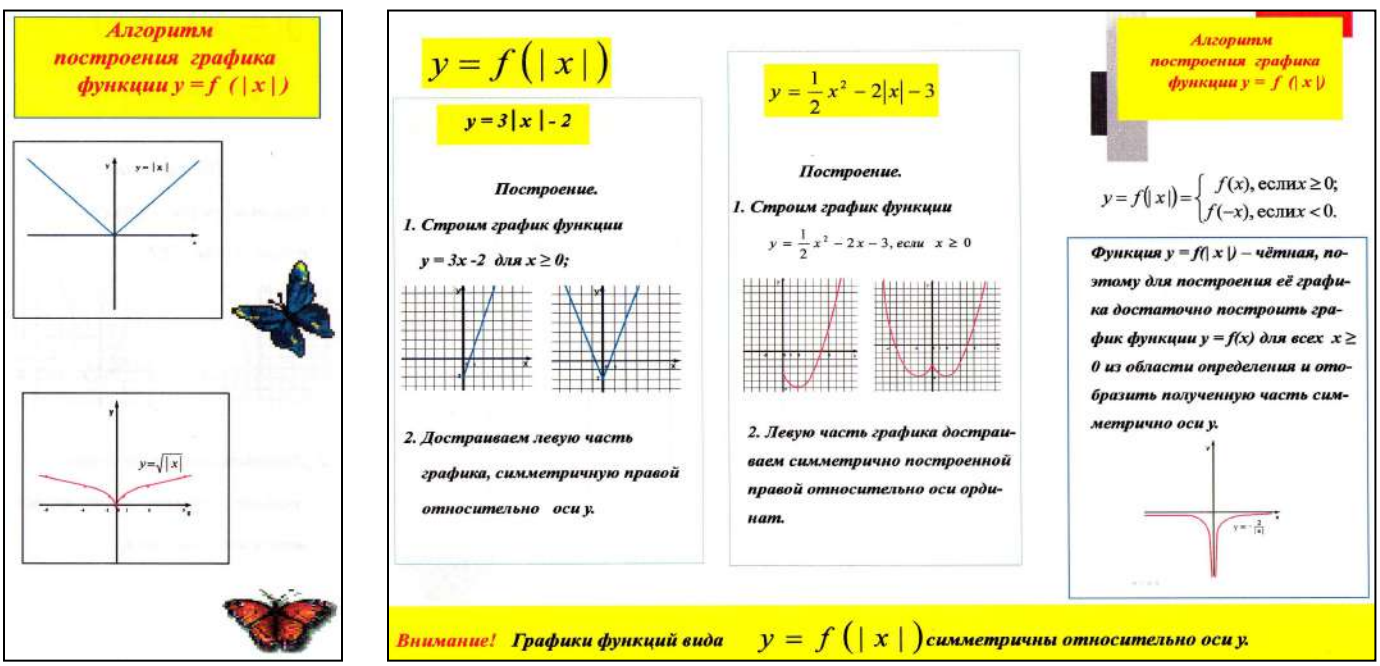
Решение.

| x | -3 + a = 4 или | x | -3 + a = - 4,
a = 7-| x |, a = -1 - | x |.
Построим графики функций:
y = 7 - | x | ,
y = -1- | x | ,
y = a.



Прямая y = a пересекает график в трёх точках при a = -1, т.е. исходное уравнение имеет ровно три корня при a = - 1.
Ответ: -1.

Макет буклета третьей группы



ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная учебно-исследовательская работа помогла учащимся научиться работать с дополнительной литературой по математике, отбирать нужный материал, сделав предварительный анализ прочитанного, строить графики новым способом, расширить свои умения работы на компьютере.

Задачи (уравнения, неравенства, построение графиков), содержащие знак модуля, относятся к задачам исследовательского характера и связаны со всеми разделами школьного курса, используются при повторении, систематизации и обобщении изученного материала. На задачах с модулем можно проверить уровень знаний по основным базовым разделам математики, первоначальные навыки исследовательской деятельности.