Т.В. Родина, Е.В. Козырева

МАОУ «Гимназия №8», г. Ангарск,

МАОУ «Ангарский лицей №1», г. Ангарск,

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МАЖОРАНТ КАК СПОСОБ СИСТЕМНОГО ПОДХОДА К АНАЛИЗУ УСЛОВИЙ И РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Практика обучения математике показывает, что учащемуся недостаточно знать только предметное содержание математических фактов для их полноценного усвоения. Требуется ещё уметь видеть и понимать способы организации этого содержания, логическую структуру изучаемого, его место в общей системе математических знаний. Неудачи в решении часто связаны с отходом от системности, с недооценкой тех или иных связей между компонентами системы. Поэтому важно показать учащимся различные подходы к решению задач и проблем. Одним из возможных способов решения задач является метод мажорант (оценки), в процессе применения которого формируется неординарность мышления и раскрывается творческий потенциал учащихся.

Рассмотрим примеры:

№1. Найти все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение $a^2+7|x-3|+2^{0,25x^2-1,5x+2,25}=2a+2|3x-2a-9|$ имеет хотя бы один корень.

Решение: 1)Запишем уравнение в виде:

$2^{0,25x^2-1,5x+2,25}=2|3x-2a-9|-7|x-3|-a^2+2a$

2) Выполним оценку левой части полученного уравнения: т.к. $0,25x^2-1,5x+2,25=0,25(x-3)^2\geq 0$, то $2^{0,25x^2-1,5x+2,25}=2^{0,25(x-3)^2}\geq 2^0=1$. Значит, наименьшее значение выражения $2^{0,25x^2-1,5x+2,25}=1$ и достигается при $x=3$.

3) Выполним оценку правой части полученного уравнения:

пусть $f(x)=2|3x-2a-9|-7|x-3|-a^2+2a$. При раскрытии модуля будем получать линейную функцию, которая при $x\leq 3$ возрастает, при $x\geq 3$ убывает. Значит, при $x=3$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение:

$f(3)=2|3\cdot 3-2a-9|-7|3-3|-a^2+2a=-a^2+4|a|+2a$

3) Тогда уравнение имеет хотя бы один корень, если $f(3)\geq 1$.

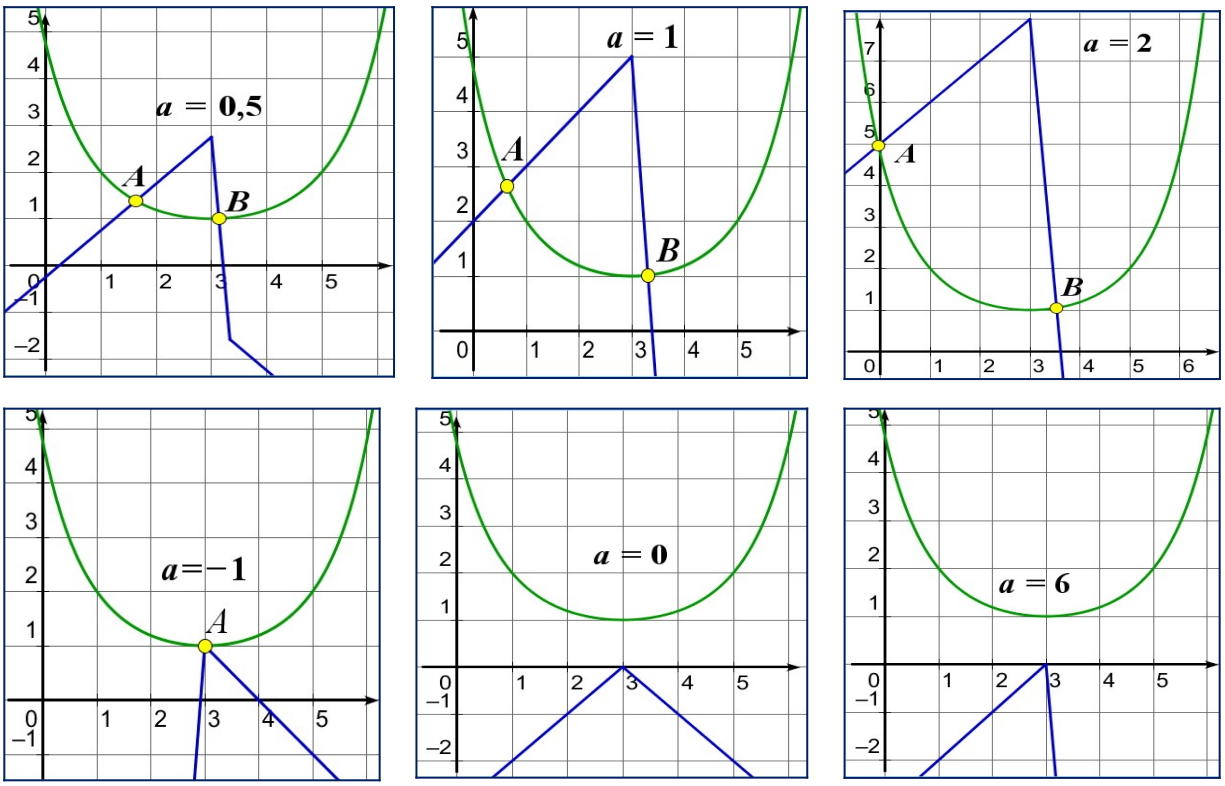
4) Решим неравенство $-a^2+4|a|+2a\geq 1$

а) если $a\geq 0$, то $a^2-6a+1\leq 0 \Longleftrightarrow a\in[3-2\sqrt{2};3+2\sqrt{2}]$

б) если $a<0$, то $a^2+2a+1\leq 0 \Longleftrightarrow (a+1)^2\leq 0 \Longleftrightarrow a=-1$

Ответ: $a\in\{-1\}\cup[3-2\sqrt{2};3+2\sqrt{2}]$.

Примечание: на чертежах видно, как изменяется количество корней уравнения в зависимости от значений параметра.



№ 2. Решите неравенство $5^{-|x-2|}\cdot\log_2(4x-x^2-2)\geq 1$

Решение: 1) Представим неравенство в виде $\log_2(4x-x^2-2)\geq 5^{|x-2|}$

2) Выполним оценку левой части полученного неравенства: т.к.

$4x-x^2-2=-(x-2)^2+2\leq 2$ и основание логарифма больше 1, то

$\log_2(4x-x^2-2)\leq\log_2 2 \Longleftrightarrow \log_2(4x-x^2-2)\leq 1$.

Значит, наибольшее значение $\log_2(4x-x^2-2)=1$ и достигается при $x=2$.

3) Выполним оценку правой части полученного неравенства:

т.к. $|x-2|\geq 0, \forall x\in R$, и 5>1,то $5^{|x-2|}\geq 5^0 \Longleftrightarrow 5^{|x-2|}\geq 1$. Значит, наименьшее значение

$5^{|x-2|}=1$ и достигается при $x=2$.

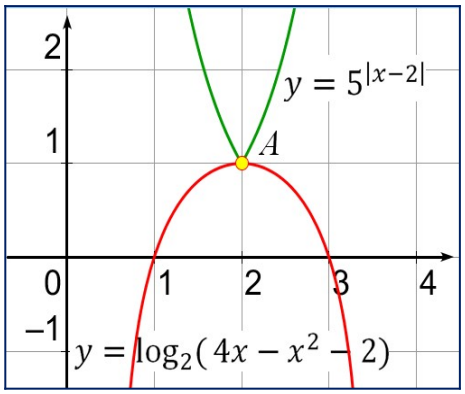
4) $\left.\begin{matrix}\log_2(4x-x^2-2)\leq 1\\ 5^{|x-2|}\geq 1\end{matrix}\right\} \Longrightarrow \log_2(4x-x^2-2)\leq 1\leq 5^{|x-2|}$

5) $\left.\begin{array}{l} \textit{Из условия}: \log_2(4x-x^2-2)\geq 5^{|x-2|} \\ \textit{Получили}: \log_2(4x-x^2-2)\leq 1\leq 5^{|x-2|} \end{array}\right\} \Longrightarrow \log_2(4x-x^2-2)\leq 1\leq 5^{|x-2|}\leq \log_2(4x-x^2-2).$

Полученная цепочка неравенств выполняется, только если каждое из них

является равенством: $\begin{cases} \log_2(4x-x^2-2)=1 \\ 1=5^{|x-2|} \\ \log_2(4x-x^2-2)=5^{|x-2|} \end{cases} \Longleftrightarrow$ при

$x=2$.



Ответ: 2.

Примечание: графическая иллюстрация показывает, что решением неравенства является абсцисса точки ***A* (2;1)**, т.е. $x = 2$.

№ 3. Решить систему $\begin{cases} \sqrt{x+2}+\sqrt{x^2+5x+5}\geq 2 \\ x^2+6x+5\leq 0 \end{cases}$

Решение: 1) Заметим, что $x^2+6x+5=(x+2)+(x¿¿2+5x+5)-2¿$

2) Тогда (после введения замены $\sqrt{x+2}=a, a\geq 0; \sqrt{x^2+5x+5}=b, b\geq 0$) получим систему

$$\begin{cases} a+b\geq 2 \\ a^2+b^2-2\leq 0 \\ a\geq 0; b\geq 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a+b\geq 2 \\ a^2+b^2\leq 2 \\ a\geq 0; b\geq 0 \end{cases} (1)$$

3) Применим неравенство $\frac{a^2+b^2}{2}\geq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ ¿равенство достигается при $a=b$).

Умножим обе части этого неравенства на 2 и получим $a^2+b^2\geq\frac{(a+b)^2}{2}$.

Т.к. $a+b\geq 2$, то $a^2+b^2\geq\frac{(a+b)^2}{2}\geq\frac{2^2}{2}=2$. Таким образом, $a^2+b^2\geq 2$

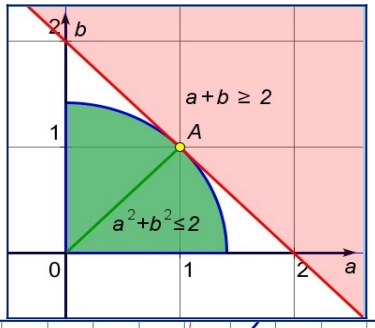
4) $\left.\begin{array}{l} \textit{Из условия}: a^2+b^2\leq 2 \\ \textit{Получили}: a^2+b^2\geq\frac{(a+b)^2}{2}\geq\frac{2^2}{2}=2 \end{array}\right\} \Longrightarrow 2\geq a^2+b^2\geq\frac{(a+b)^2}{2}\geq 2.$

Полученная цепочка неравенств выполняется, только если каждое из них

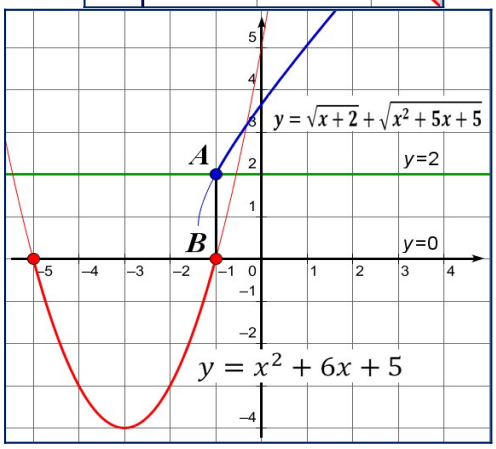
является равенством: $\begin{cases} a^2+b^2=2 \\ a=b \\ a+b=2 \end{cases} \Longleftrightarrow a=b=1$

5) Вернемся к замене: $\sqrt{x+2}=1 \Longleftrightarrow x=-1$. **Ответ: – 1**.

Примечание: 1) другой способ решения системы (1): сделаем графическую иллюстрацию на координатной плоскости aOb. Пересечением множеств, удовлетворяющих каждому неравенству системы, является точка ***A*(1;1)**. Тогда $a=b=1$.



2) следующий график показывает, что пересечением множеств, удовлетворяющих каждому неравенству **исходной** системы является абсцисса точек ***A*(–1;2)** и ***B*(–1;0)**. Тогда $x=-1$.



№ 4. Решить уравнение $2\left(1+\sin^2(x-1)\right)=2^{2x-x^2}$

Решение: 1) Разделим обе части данного уравнения на 2, получим

$1+\sin^2(x-1)=2^{2x-x^2-1} \Longleftrightarrow \sin^2(x-1)+1=2^{-(x-1)^2}$

2) Выполним оценку левой части полученного уравнения:

т.к. $0\le\sin^2(x-1)\le1$, то $1\le\sin^2(x-1)+1\le2$. Значит, наименьшее значение $\sin^2(x-1)+1=1$ и достигается при $x=1+\pi\kappa, \kappa\in Z$.

3) Выполним оценку правой части полученного уравнения:

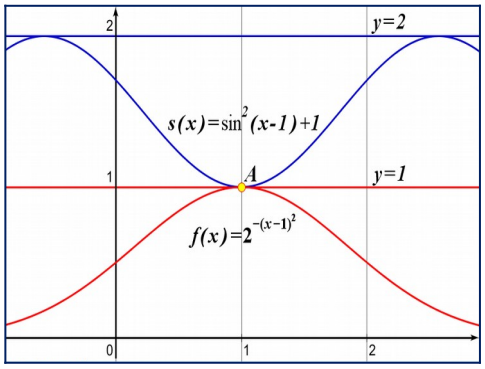
т.к. $-(x-1)^2\le0, \forall x\in R$, и $2>1$,то $2^{-(x-1)^2}\le2^0 \Longleftrightarrow 2^{-(x-1)^2}\le1$. Значит, наибольшее значение $2^{-(x-1)^2}=1$ и достигается при $x=1$.

4) $\begin{cases} x=1+\pi\kappa, \kappa\in Z \\ x=1 \end{cases} \Longleftrightarrow x=1$. **Ответ: 1**.

Примечание:

График функции $s(x)=\sin^2(x-1)+1$ находится в полосе, образованной прямыми $y=2$ и $y=1$.

График функции $f(x)=2^{-(x-1)^2}$ находится в полосе,



образованной прямыми $y=0$ и $y=1$. $\boldsymbol{A(1;1)}$ **–** единственная общая точка графиков. Таким образом, $x=1$.

№ 5. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2+2x\sin y+1=0 \\ 8|x|y(x^2+y^2)+\pi^3+4\pi=0 \end{cases} (2)$

Решение: (дискриминантный метод как частный случай метода мажорант)

1) Применим схему метода к первому уравнению системы:

т.к. $\frac{D}{4}=\sin^2 y-1\le 0, \forall\, y\in R$, то первое уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x=-\sin y \\ \sin^2 y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ \sin y=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-1 \\ \sin y=1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=\frac{-\pi}{2}+2\pi\kappa, \kappa\in Z \end{cases} \\ \begin{cases} x=-1 \\ y=\frac{\pi}{2}+2\pi m, m\in Z \end{cases} \end{array}\right.$$

2) Тогда система $(2)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=\frac{-\pi}{2}+2\pi\kappa, \kappa\in Z \\ 8y(1+y^2)+\pi^3+4\pi=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-1 \\ y=\frac{\pi}{2}+2\pi m, m\in Z \\ 8y(1+y^2)+\pi^3+4\pi=0 \end{cases} \end{array}\right. (3)$

3) Решим уравнение $8y(1+y^2)+\pi^3+4\pi=0$

$$8y+8y^3+\pi^3+4\pi=0 \Leftrightarrow (2y+\pi)(4y^2+\pi^2-2\pi+4)=0 \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} 2y+\pi=0 \\ 4y^2+\pi^2-2\pi+4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\frac{-\pi}{2} \\ y\in\varnothing \end{array}\right. \Leftrightarrow y=\frac{-\pi}{2}$$

4) Тогда совокупность $(3) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=\frac{-\pi}{2}+2\pi\kappa, \kappa \in Z \\ y=\frac{-\pi}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x=-1 \\ y=\frac{\pi}{2}+2\pi m, m \in Z \\ y=\frac{-\pi}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=\frac{-\pi}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x=-1 \\ y \in \varnothing \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\frac{-\pi}{2} \end{cases}$. **Ответ:**

$x=1, y=\frac{-\pi}{2}$.

Литература: Ткачук В.В. Математика абитуриенту – М.: МЦНМО, 2004