МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

дисциплины

ОУД.03 МАТЕМАТИКА

Содержание

Практическая работа №1

Тема: Вычисление пределов функции

Цель: сформировать умение находить пределы последовательностей и пределы функций, использовать замечательные пределы для нахождения пределов.

Теоретические сведения к практической работе

Пусть существует последовательность действительных чисел $\{a_n \in R : n \quad 1\}$.

Число а называется пределом последовательности

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \in R \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in N$$
$$\forall n > n_0 \quad |a_n - a| < \varepsilon$$

Пример 1. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3+6n-5}{10n^3-8n^2+2}$

Решение $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3+6n-5}{10n^3-8n^2+2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3\left(1+\frac{6}{n^2}-\frac{5}{n^3}\right)}{n^3\left(10-\frac{8}{n}+\frac{2}{n^3}\right)} = \frac{1}{10}$

Пример 2. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-2n+3}{12n^3+4n^2-1}$

Решение $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-2n+3}{12n^3+4n^2-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^3}\right)}{n^3\left(12+\frac{4}{n}-\frac{1}{n^3}\right)} = \frac{0}{12} = 0$

Пример 3. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+6}{7n-8}$

Решение $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+6}{7n-8} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2(1+\frac{6}{n^2})}{n^2(\frac{7}{n}-\frac{8}{n^2})} = \frac{1}{0} = \infty$

Пример 4. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+8}-\sqrt{n-1}\right)$

Решение

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+8}-\sqrt{n-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{2n+8}-\sqrt{n-1}\right)\left(\sqrt{2n+8}+\sqrt{n-1}\right)}{\left(\sqrt{2n+8}+\sqrt{n-1}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\left(\sqrt{2n+8}\right)^2-\left(\sqrt{n-1}\right)^2\right)}{\left(\sqrt{2n+8}+\sqrt{n-1}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+8)-(n-1)}{\left(\sqrt{2n+8}+\sqrt{n-1}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+8-n+1}{\left(\sqrt{2n+8}+\sqrt{n-1}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+9}{\left(\sqrt{2n+8}+\sqrt{n-1}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1+\frac{9}{n}\right)}{\left(\sqrt{n^2\left(\frac{2}{n}+\frac{8}{n^2}\right)}+\sqrt{n^2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1+\frac{9}{n}\right)}{n\left(\sqrt{\left(\frac{2}{n}+\frac{8}{n^2}\right)}+\sqrt{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{9}{n}\right)}{\left(\sqrt{\left(\frac{2}{n}+\frac{8}{n^2}\right)}+\sqrt{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}\right)}=\frac{1}{0}=\infty$$

Число A называют *пределом функции* $f(x)$ при $x\to x_0$ (и пишут $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$), если для любого $\varepsilon>0$ найдется число $\delta>0$, зависящее от , такое, что для всех $x\neq x_0$, удовлетворяющих условию $|x-x_0|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Теоремы о пределах:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}c=c$ (c=const).

2. Если $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A,\ \lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=B,$ то:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm\varphi(x))=\lim_{x\to x_0}f(x)\pm\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=A\pm B;$$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot\varphi(x))=\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=A\cdot B;$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)}=\frac{A}{B},\quad (B\neq 0).$$

Первый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Второй замечательный предел (число e = 2,718…):

$$\lim_{x\to\infty}(1+1/x)^x=e \text{ или } \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

Замечательные пределы:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+\text{x})}{x}=\log_a e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$$

Пример 5. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5\sin 8x}{6x}$

Решение $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5\sin 8x}{6x}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{5\sin 8x\cdot 8}{6\cdot 8x}=\frac{5\cdot 8}{6}=\frac{40}{6}=\frac{20}{3}$

Пример 6. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{x}$

Решение $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{x}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{5\ln(1+5x)}{5x}=5$

Пример 7. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{3x}}$

Решение $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{3x}}\overset{\left[1^\infty\right]}{=}\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{5x}\cdot 5x\cdot\frac{1}{3x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(5x\cdot\frac{1}{3x}\right)}=e^{\frac{5}{3}}$

Пример 8. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4}{x^2+1}\right)^x$

Решение

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4}{x^2+1}\right)^{x}\overset{[1^\infty]}{=}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1+3}{x^2+1}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x^2+1}\right)^{x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2+1}{3}}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2+1}{3}}\right)^{\frac{x^2+1}{3}\cdot\frac{3}{x^2+1}\cdot x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^2+1}\cdot x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x}{x^2+1}}=e^0=1$$

Чтобы найти предел элементарной функции $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, нужно предельное значение аргумента подставить в функцию и посчитать. При этом, если $x=x_0$ принадлежит области определения функции, то значение предела будет найдено, оно равно значению функции в точке $x=x_0$. При вычислении пределов полезно использовать следующие соотношения. Если $c=\mathrm{const}$, $c\neq 0$, $c\neq\infty$, то, учитывая свойства б.б. и б.м. функций, получим:

$$\frac{0}{c}\to 0;\ \ \frac{c}{0}\to\infty;\ \ \frac{\infty}{c}\to\infty;\ c\cdot\infty\to\infty; c\cdot 0\to 0;\ \ a^\infty\to 0, \text{если } 0<a<1; a^\infty\to\infty, \text{если } a>1.$$

Случаи, в которых подстановка предельного значения аргумента в функцию не дает значения предела, называют неопределенностями; к ним относятся неопределенности видов:

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right);\ \ \left(\frac{0}{0}\right);\ \ (0\cdot\infty);\ \ (\infty-\infty);\ (1^\infty);\ (\infty^0);\ (0^0).$$

Пример 9. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3+15}{10x^2-4}$

Решение $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3+15}{10x^2-4}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2\cdot 1^3+15}{10\cdot 1^2-4}=\dfrac{2+15}{10-4}=\dfrac{17}{6}$

Пример 10. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2-5x+4}$

Решение $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-16}{x^2-5x+4}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim\limits_{x\to4}\dfrac{(x-4)(x+4)}{(x-4)(x-1)}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{(x+4)}{(x-1)}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{(4+4)}{(4-1)}=\dfrac{8}{3}$

Пример 11. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{2x+8}-\sqrt{23-x}}{x-5}$

Решение

$$\lim_{x\to5}\frac{\sqrt{2x+8}-\sqrt{23-x}}{x-5}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim_{x\to5}\frac{\left(\sqrt{2x+8}-\sqrt{23-x}\right)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to5}\frac{\left(\left(\sqrt{2x+8}\right)^2-\left(\sqrt{23-x}\right)^2\right)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=\lim_{x\to5}\frac{\left((2x+8)-(23-x)\right)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=\lim_{x\to5}\frac{(2x+8-23+x)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to5}\frac{(3x-15)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=\lim_{x\to5}\frac{3(x-5)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=\lim_{x\to5}\frac{3}{\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=$$

$$=\frac{3}{\left(\sqrt{2\cdot5+8}+\sqrt{23-5}\right)}=\frac{3}{\left(\sqrt{18}+\sqrt{18}\right)}=\frac{3}{2\sqrt{18}}=\frac{3}{2\cdot3\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{1\cdot2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\cdot2\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{4\cdot2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Содержание практической работы

Задание 1. Вычислить пределы последовательностей:

$1)\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{3n+5}$ $\quad 2)\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3-2n}{n+6}$ $\quad 3)\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10n+3}{1+2n}$

$4)\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n+16}{9n}$ $\quad 5)\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^2+(3+n)^2}{(3-n)^2-(3+n)^2}$ $\quad 6)\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2+(n-1)^2}{(n-1)^2-(n+1)^2}$

$7)\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}$ $\quad 8)\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-100n^2+1}{100n^2+16n}$ $\quad 9)\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n-7}-\sqrt{n+2}\right)$

Задание 2. Вычислить пределы функций:

$$1)\lim_{x\to 0}\frac{x^4+2x^2-3x}{x^3-3x^2+x}\quad 2)\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x-2}{x^2+x}\quad 3)\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)}{x^2}$$

$$4)\lim_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{1+2x}-3\right)}{\sqrt{x}-2}\quad 5)\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}\quad 6)\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)^2+(x-1)^2}{(x-1)^2-(x+1)^2}$$

$$7)\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt[3]{x^3+2x-1}}{x+2}\quad 8)\lim_{x\to 0}\frac{x^3-15x^2+x}{18x^2+15x}\quad 9)\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{4x-7}-\sqrt{x+2}\right)}{x-2}$$

Задание 3. Вычислить пределы функций, используя замечательные пределы:

$$1)\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2}\right)^{x^2+1}\quad 2)\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x}\quad 3)\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$$

$$4)\lim_{x\to 0}\left(1+10x^2\right)^{x^3\cdot\frac{1}{x}}\quad 5)\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4x}\quad 6)\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-5x}{\sin 4x}$$

$$7)\lim_{x\to 0}\frac{tg3x}{tgx}\quad 8)\lim_{x\to 0}\frac{9\ln(1-2x)}{4arctg3x}\quad 9)\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 7x}{\sin x\cdot x^2}$$

Практическая работа №2.1

Тема: Вычисление производных функций.

Цель: сформировать умение исследовать функцию на непрерывность и наличие точек разрыва, определять род точек разрыва.

Теоретические сведения к практической работе

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если она: 1) определена в точке x_0; 2) имеет конечный предел при $x \to x_0$; 3) этот предел равен значению функции в этой точке $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Функция называется непрерывной, если:

1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f = 0 \quad \Delta f = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$

2) $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Функция называется непрерывной на некотором промежутке X, если она непрерывна в каждой точке этого промежутка.

Пример 1: Доказать, что функция $f(\mathrm{x}) = 3\mathrm{x}^2 - 2x + 1$ непрерывна на (-∞;+∞)

Решение:

$$\triangle f = \left(3\left(\mathrm{x}_0 + \triangle x\right)^2 - 2\left(\mathrm{x}_0 + \triangle x\right) + 1\right) - \left(3\mathrm{x}_0{}^2 - 2\mathrm{x}_0 + 1\right) = 3\mathrm{x}_0{}^2 + 6x_0\triangle x + 3\triangle x^2 - 2x_0 - 2\triangle x + 1 - 3\mathrm{x}_0{}^2 + 2\mathrm{x}_0 - 1 =$$

$$= 6x_0\triangle x + 3\triangle x^2 - 2\triangle x$$

$$\lim_{\triangle x \to 0} \triangle f = \lim_{\triangle x \to 0}\left(6x_0\triangle x + 3\triangle x^2 - 2\triangle x\right) = 0$$

Точка x_0 называется точкой разрыва функции, если в этой точке не выполнено хотя бы одно из условий 1—3 непрерывности функции. Все элементарные функции непрерывны во всех точках, где они определены.

Классификация точек разрыва:

1) x_0 – точка устранимого разрыва, если а) $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(\mathrm{x}) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(\mathrm{x}) \neq f(\mathrm{x}_0)$

   б) в точке x_0 функция не определена

2) x_0 – точка разрыва I рода, если $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(\mathrm{x}) \neq \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(\mathrm{x})$

   $h = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ - скачок функции

3) x_0 – точка разрыва II рода, если хотя бы один из односторонних пределов равен бесконечности или не существует

Пример 2:

Найти точки разрыва функции и установить их тип

$$a)\ y=f(x)=\begin{cases} x^2+1, x<1 \\ 0, x=1 \\ x+1, x>1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1-0}\left(x^2+1\right)=2$$

$$\lim_{x\to 1+0}\left(x+1\right)=2$$

$$f(1)=0$$

$$\Rightarrow x_0=1 \quad \textit{точка} \quad \textit{устранимого} \quad \textit{разрыва}$$

$$б)\ y=f(x)=\begin{cases} x^2, x\le 1 \\ x-2, x>1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1-0} x^2=1\ne \lim_{x\to 1+0}\left(x-2\right)=-1$$

$$\Rightarrow x_0=1 \quad \textit{точка} \quad \textit{разрыва} \quad I \quad \textit{рода}$$

$$h=-1-1=-2$$

$$в)\ y=2^{\frac{1}{x-1}}$$

$$\lim_{x\to 1-0} 2^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to 1-0} 2^{\frac{1}{1-0-1}}=2^{-\infty}=\frac{1}{2^{\infty}}=0$$

$$\lim_{x\to 1+0} 2^{\frac{1}{x-1}}=2^{\infty}=\infty$$

$$\Rightarrow x_0=1 \quad \textit{точка} \quad \textit{разрыва} \quad II \quad \textit{рода}$$

Содержание практической работы

Задание 1. Доказать, что функция является непрерывной

$а)\ f(x)=x+9$

$б)\ f(x)=x^3+8$

$в)\ f(x)=2x^2+6x-5$

$г)\ f(x)=10x^2-12x$

Задание 2. Найти точки разрыва и установить их тип

$$а)\ y=f(x)=\begin{cases} -e^{-x}, x<0 \\ 0, x=0 \\ e^{x}, x>0 \end{cases}$$

$$б)\ y=f(x)=\frac{\sin x}{x}$$

$$в)\ y=f(x)=e^{\frac{1}{x+3}}$$

$$г)\ y=f(x)=\frac{\cos x}{x}$$

Практическая работа №2.2

Тема: Построение графиков функции с помощью производной.

Цель: сформировать умение находить производные функций, заданных в явном, логарифмическом и параметрическом виде, находить производные сложных функций, знать геометрический смысл производной, применять правило Лопиталя для нахождения пределов.

Теоретические сведения к практической работе

Производной функции $y = f(x)$ называется конечный предел отношения приращения функции $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$ к приращению независимой переменной Δx при стремлении последнего к нулю:

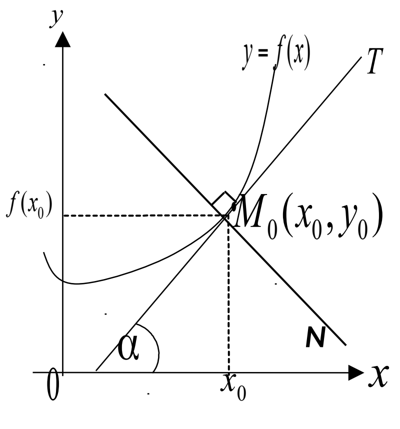
$$y' = f' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Обозначения производной в точке x_0:

$$f'(x_0), \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0}, \quad \frac{df(x_0)}{dx}, \quad \left.y'_x\right|_{x_0}, \quad y'(x_0)$$ и другие.

Если функция в точке x_0 (или на промежутке X) имеет конечную производную, то функция называется *дифференцируемой в этой точке* (или на промежутке X).

Процесс отыскания производной называется *дифференцированием*.



Геометрический смысл производной.

Если кривая задана уравнением $y = f(x)$, то $f'(x_0) = \mathrm{tg}\alpha$ — угловой коэффициент касательной к графику функции в этой точке ($K = \mathrm{tg}\alpha = f'(x_0)$).

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке x_0 (прямая M_0T) имеет вид:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \qquad (2)$$

а уравнение нормали (M_0N):

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \qquad (3)$$

Правила дифференцирования

№ пп	$U = u(x)$, $V=V(x)$ — дифференцируемые функции	№ пп	$U = u(x)$, $V=V(x)$ — дифференцируемые функции
I	$(u \pm v)' = u' \pm v'$	**VI**	Производная сложной функции $y = f[u(x)]$, $y' = f'_u \cdot u'_x$
II	$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$	**VII**	Функция задана параметрически уравнениями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $y'_x = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.
III	$(c \cdot u)' = c \cdot u'$, $c = \text{const}$		
IV	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$, $(v(x) \neq 0)$	**VIII**	Если $y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y)$ — взаимно обратные функции, то $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$, $(y'_x \neq 0)$.
V	$\left(\dfrac{c}{v}\right)' = -\dfrac{c \cdot v'}{v^2}$, $c = \text{const}$ $(v(x) \neq 0)$		

Формулы дифференцирования основных элементарных функций

№ пп	c=const, x — независимая переменная, $u = u(x)$ — дифференцируемая функция		
1	$C' = 0$	**9**	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
2	$x' = 1$	**10**	$(\text{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$
3	$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$	**11**	$(\text{ctg} u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
4	$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$	**12**	$(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$; $\lvert u \rvert < 1$
5	$(e^u)' = e^u \cdot u'$	**13**	$(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$; $\lvert u \rvert < 1$
6	$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$ $(u > 0)$	**14**	$(\text{arctg} u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$
7	$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ $(u > 0)$	**15**	$(\text{arcctg} u)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$
8	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$		

Производной n-го порядка называется производная от производной (n–1)-го порядка. Производные высших порядков вычисляются последовательным дифференцированием данной функции.

Производная второго порядка $y'' = (y')'$ или $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

Производная третьего порядка $y''' = (y'')'$ или $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ и т. д.

Пример 1. Найти производные функций:

$$а)\ y = 3x^5 + \sqrt[3]{x^2} - \frac{4}{x^3};\ б)\ s = (e^t - 2\ln t)\sin t;\ в)\ u = \mathrm{ctg}^3\frac{v}{3};\ г)\ z = \frac{\mathrm{arctg}2t}{1+4t^2}.$$

Решение.

а) Используя правила I, III и формулу (3), получим:

$$y' = (3x^5 + \sqrt[3]{x^2} - 4/x^3)' = 3(x^5)' + (x^{2/3})' - 4(x^{-3})' =$$
$$= 3\cdot 5x^4 + \frac{2}{3}x^{-1/3} - 4(-3x^{-4}) = 15x^4 + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{12}{x^4}.$$

б) Используя правила дифференцирования произведения функций II, разности I, формулы (5), (7), (8) и учитывая, что независимая переменная есть t, т. е. t=1, получим:

$$s = [(e^t - 2\ln t)\sin t]' = (e^t - 2\ln t)'\sin t + (e^t - 2\ln t)(\sin t)' =$$
$$((e^t)' - 2(\ln t)')\sin t + (e^t - 2\ln t)\cos t = \left(e^t - \frac{2}{t}\right)\sin t + (e^t - 2\ln t)\cos t.$$

в) Сложная степенная функция, независимая переменная есть v, т. е. v=1; используя формулу (3), получим:

$$u' = \left[\left(\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\right)^2\right] = 2\left(\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\right)\left(\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\right)' = 2\left(\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\right)\left(-\frac{\left(\frac{v}{3}\right)'}{\sin^2\frac{v}{3}}\right) =$$

$$= 2\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\left(-\frac{\frac{1}{3}}{\sin^2\frac{v}{3}}\right) = -\frac{2\operatorname{ctg}\frac{v}{3}}{3\sin^2\frac{v}{3}} = -\frac{2}{3}\frac{\cos\frac{v}{3}}{\sin^3\frac{v}{3}}.$$

г) Используя правила дифференцирования частного IV, суммы I, III и формулы (3), (14), учитывая, что t=1, получим: □

$$z' = \left(\frac{\operatorname{arctg}2t}{1+4t^2}\right)' = \frac{(\operatorname{arctg}2t)'(1+4t^2) - (\operatorname{arctg}2t)(1+4t^2)'}{(1+4t^2)^2} =$$

$$= \frac{\frac{(2t)'}{1+4t^2}(1+4t^2) - \operatorname{arctg}2t(0+4\cdot 2t)}{(1+4t^2)^2} = \frac{2-8t\operatorname{arctg}2t}{(1+4t^2)^2}.$$

Пример 2. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y=\sqrt{x^2-3}$ в точке с абсциссой x_0=2.

Используем уравнения касательной (2) и нормали (3):

1) $y(x_0) = y(2) = \sqrt{2^2-3} = 1;$

2) $y'(x) = ((x^2-3)^{1/2})' = \frac{1}{2}(x^2-3)^{-\frac{1}{2}}(x^2-3)' = \frac{1}{2}(x^2-3)^{-\frac{1}{2}}2x = \frac{x}{\sqrt{x^2-3}};$

$$y'(x_0) = y'(2) = \frac{2}{\sqrt{2^2-3}} = 2.$$

Подставим x_0, $y(x_0)$, $y'(x_0)$ в уравнения и получим: $y = 1 + 2(x-2)$, или $2x - y - 3 = 0$ — уравнение касательной.

$y = 1 - \frac{1}{2}(x-2)$, или $x + 2y - 4 = 0$ — уравнение нормали.

Пример 3. Найти производную y'_x, если функция задана параметрически: $\begin{cases} x = \ln(5-2t) \\ y = \operatorname{arctg}(5-2t). \end{cases}$

Используем правило VII $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

$$\begin{cases} x'_t = \dfrac{(5-2t)'}{5-2t} = \dfrac{-2}{5-2t} \\ y'_t = \dfrac{(5-2t)'}{1+(5-2t)^2} = \dfrac{-2}{1+(5-2t)^2}. \end{cases}$$

$$y'_x = \frac{-2}{1+(5-2t)^2} : \frac{-2}{5-2t} = \frac{5-2t}{1+(5-2t)^2} = \frac{5-2t}{4t^2-20t+26}.$$

Пример 4. Найти дифференциалы функций:

а) $y = x + \cos 2x$; *б*) $u = 3 + e^{-x}$; *в*) $s = \ln 3t$.

Для дифференциала функции $y = y(x)$ справедлива формула $dy = y'(x)dx$, т. е. дифференциал функции равен произведению производной от функции на дифференциал независимой переменной.

Решение.

а) $dy = (x + \cos 2x)'dx = (1 - \sin 2x \cdot 2)dx = (1 - 2\sin 2x)dx.$

б) $du = (3 + e^{-x})'dx = e^{-x}(-1)dx = -e^{-x}dx.$

в) $ds = (\ln 3t)'dt = \dfrac{(3t)'}{3t}dt = \dfrac{3}{3t}dt = \dfrac{1}{t}dt.$

Пример 5. Найти производную второго порядка функции $y = x^2 \ln x$.

Решение. $y'' = (y')'$, поэтому найдём производную первого порядка, а затем второго.

$$y' = (x^2 \ln x)' = (x^2)' \ln x + x^2 (\ln x)' = 2x \cdot \ln x + x^2 \frac{1}{x} = 2x \ln x + x = x(2\ln x + 1).$$

$$y'' = (x(2\ln x + 1))' = x'(2\ln x + 1) + x(2\ln x + 1)' = 2\ln x + 1 + x\frac{2}{x} = 2\ln x + 3.$$

Пример 6. Найти производную функции $y = x^x$ логарифмическим дифференцированием

$$y = x^x$$

$$\ln y = \ln x^x$$

$$\ln y = x \cdot \ln x$$

$$\left(\ln y\right)' = \left(x \cdot \ln x\right)'$$

$$\frac{y'}{y} = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{y'}{y} = \ln x + 1$$

$$y' = y\left(\ln x + 1\right)$$

$$y' = x^x \cdot \left(\ln x + 1\right)$$

Содержание практической работы

Задание 1. Найти производные 1-го порядка данных функций

1) *а)* $y = 3x^3 - \frac{5}{x^7} - \sqrt[4]{x^5}$; *б)* $s = (1 + t^2)(2 - 3\mathrm{arcctg}t)$; *в)* $u = \ln^3 \frac{V}{2}$; *г)* $z = \frac{5 - \sin 3t}{e^{4t}}$.

2) *а)* $y = 5x - \frac{2}{x^4} + 3\sqrt[5]{x^6}$; *б)* $s = (4 - 3\ln t)(5 + 2\sin t)$; *в)* $u = \sin^4(2V + 3)$; *г)* $z = \frac{\sin(2 - t)}{2 - \ln 3t}$. 3)

а) $y = 7x^2 + \frac{4}{x^6} - \sqrt[5]{x^2}$; *б)* $s = (3 - \cos t)(5 + 6\sin t)$; *в)* $u = \sqrt[3]{1 - 4V^2}$; *г)* $z = \frac{t^3 - e^{3t}}{\arccos 2t}$.

4) *а)* $y = 5x^2 + \frac{3}{x^4} - \sqrt[6]{x^7}$; *б)* $s = (3t^3 - 4)(t - 2\cos t)$; *в)* $u = \ln^2(5V - 3)$; *г)* $z = \frac{\ln(4 - 5t)}{\sin t}$.

5) *а)* $y = x^5 - \frac{2}{x^3} + 2\sqrt[7]{x^5}$; *б)* $s = t^4(4 + \mathrm{arctg}t)$; *в)* $u = \cos^3(3V + 1)$; *г)* $z = \frac{t - \arcsin 5t}{e^{-t}}$.

6) *а)* $y = x^4 + \frac{1}{x} - 2\sqrt[3]{x}$; *б)* $s = (3 + \mathrm{tg}t)(1 - 4\mathrm{ctg}t)$; *в)* $u = tg^4(3V + 2)$; *г)* $z = \frac{\mathrm{arctg}2t}{1 + 4t^2}$.

Задание 2. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0.

1) $\dfrac{x^2-3}{x}$, $x_0=1$.

2) $\sqrt{5-x^2}$, $x_0=2$.

3) $\dfrac{x^2+3x}{3}$, $x_0=-1$.

4) $\sqrt{x}+2x$, $x_0=9$.

5) $\dfrac{x^2}{x-2}$, $x_0=1$.

6) $\sqrt{1+3x}$, $x_0=1$.

Задание 3. Найти производную y'_x функции $y=y(x)$, заданной параметрически:
$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$$

1) $\begin{cases} x=\sin 2t \\ y=\cos t \end{cases}$

2) $\begin{cases} x=\cos(2t+6) \\ y=\sin(2t+6) \end{cases}$

3) $\begin{cases} x=(1-t)^2 \\ y=\cos(t-1) \end{cases}$

4) $\begin{cases} x=\mathrm{tg}t \\ y=t^2-8 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x=e^{4t} \\ y=(1-4t)^2 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x=c\mathrm{tg}t \\ y=t^2+1 \end{cases}$

Задание 4. Найти дифференциалы функций:

1) $y=\sin 2x+5$;

2) $y=\ln x-x^3$;

3) $y = 4 + 8\sin x;$

4) $y = 2x - 1.$

5) $y = 1 - \cos x;$

6) $y = 10 - 3x^2$

Задание 5. Найти производную второго порядка функции y=f(x).

1) $y = \ln x + 9$

2) $y = \cos x - \ln x$

3) $y = \mathrm{sinx} + x^4$

4) $y = x^2 + \sin x$

5) $y = x + \ln x$

6) $y = 3e^x + 2x$

Задание 6. Найти производную функции логарифмическим дифференцированием

1) $y = (\sin x)^{\cos x}$

2) $y = (\cos x)^x$

3) $y = x^{\ln x}$

4) $y = (\sin x)^{\ln x}$

5) $y = x^{\cos x}$

6) $y = (tgx)^{\ln x}$

Практическая работа №3

Тема: Вычисление неопределенных интегралов. Применение определенного интеграла для вычисления площадей криволинейных трапеций.

Цель: сформировать умение вычислять неопределенные и определенные интегралы, используя различные методы интегрирования.

Теоретические сведения к практической работе

Функция $F(x)$, определенная на интервале (a,b), называется *первообразной* для функции $f(x)$, определенной на том же интервале (a,b), если $F'(x)=f(x)$.

Если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, то любая другая первообразная $\Phi(x)$ для функции $f(x)$ отличается от $F(x)$ на некоторое постоянное слагаемое, т. е. $\Phi(x)=F(x)+C$, где C — const.

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется совокупность всех первообразных для этой функции. Обозначается неопределенный интеграл: $\int f(x)\,dx=F(x)+C$, где $F'(x)=f(x)$, C — const.

Операция нахождений первообразной для данной функции называется *интегрированием*. Интегрирование является обратной операцией к дифференцированию:

$$\left(\int f(x)\,dx\right)'=f(x).$$

Для проверки правильности выполненного интегрирования необходимо продифференцировать результат интегрирования и сравнить полученную функцию с подынтегральной.

Свойства неопределенного интеграла:

1. $\left(\int f(x)\,dx\right)'=f(x)$; $d\int f(x)\,dx=f(x)\,dx$;

2. $\int dF(x)=F(x)+C$;

3. $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx, \qquad k$ — const;

4. $\int \big(f(x)+g(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$

Таблица основных интегралов

1. $\int 0\,du = C; \quad C = \text{const};$

2. $\int du = u + C;$

3. $\int u^{\alpha}du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1;$

3а. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C;$

4. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C;$

5. $\int a^{u}du = \dfrac{a^{u}}{\ln a} + C;$

6. $\int e^{u}du = e^{u} + C;$

7. $\int \cos u\,du = \sin u + C;$

8. $\int \sin u\,du = -\cos u + C;$

9. $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C;$

10. $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C;$

11. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\dfrac{u}{a} + C;$

12. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C;$

13. $\int \dfrac{du}{u^2 + a^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{u}{a} + C;$

14. $\int \dfrac{du}{u^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right| + C;$

15. $\int \dfrac{du}{\sin u} = \ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{u}{2}\right| + C;$

16. $\int \dfrac{du}{\cos u} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{u}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C;$

17. $\int \operatorname{tg} u\,du = -\ln|\cos u| + C;$

18. $\int \operatorname{ctg} u\,du = \ln|\sin u| + C.$

Каждая из приведенных в таблице формул справедлива на промежутке, не содержащем точек разрыва подынтегральной функции. Вычисление интегралов с использованием таблицы и основных свойств называют непосредственным интегрированием.

Пример 1. Пользуясь таблицей основных интегралов и свойствами неопределенного интеграла, найти интегралы (результат интегрирования проверить дифференцированием):

$$a)\int\left(\frac{5}{\sqrt{x^2+7}}-\frac{3x^3+1}{x^4}+2\sqrt[6]{x^5}\right)dx; \qquad б)\int\left(\frac{5}{11x^2+2}+3\cdot 5^x+\frac{16-x^2}{4+x}\right)dx.$$

Решение.

$$a)\int\left(\frac{5}{\sqrt{x^2+7}}-\frac{3x^3+1}{x^4}+2\sqrt[6]{x^5}\right)dx=\int\left(\frac{5}{\sqrt{x^2+7}}-\frac{3}{x}-\frac{1}{x^4}+2x^{5/6}\right)dx=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\text{используем свойства 3 и 4 и разобьем интеграл от суммы}\\ \text{функции на сумму интегралов, при этом постоянные}\\ \text{множители вынесем за знак интегралов}\end{matrix}\right\}=$$

$$=5\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+7}}-3\int\frac{dx}{x}-\int x^{-4}dx+2\int x^{5/6}dx=\left\{\begin{matrix}\text{используем табличные}\\ \text{интегралы 12, 4, 3}\end{matrix}\right\}=$$

$$=5\ln\left|x+\sqrt{x^2+7}\right|-3\ln|x|-\frac{x^{-4+1}}{-4+1}+2\cdot\frac{x^{5/6+1}}{5/6+1}+C=$$

$$=5\ln\left|x+\sqrt{x^2+7}\right|-3\ln|x|+\frac{1}{3x^3}+\frac{12}{11}x^{11/6}+C.$$

Проверка:

$$\left(5\ln\left|x+\sqrt{x^2+7}\right|-3\ln|x|+\frac{1}{3x^3}+\frac{12}{11}x^{11/6}+C\right)'=5\left(\ln\left|x+\sqrt{x^2+7}\right|\right)'-$$

$$-3\left(\ln|x|\right)'+\frac{1}{3}\left(x^{-3}\right)'+\frac{12}{11}\left(x^{11/6}\right)'+C'=\left\{\begin{matrix}\text{используем формулы}\\ \text{4, 3, 1 таблицы производных}\end{matrix}\right\}=$$

$$=5\cdot\frac{\left(x+\sqrt{x^2+7}\right)'}{x+\sqrt{x^2+7}}-3\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{3}(-3)\,x^{-3-1}+\frac{12}{11}\cdot\frac{11}{6}\cdot x^{11/6-1}=5\cdot\frac{1+\frac{\left(x^2+7\right)'}{2\sqrt{x^2+7}}}{x+\sqrt{x^2+7}}-$$

$$-\frac{3}{x}-\frac{1}{x^4}+2x^{5/6}=5\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+7}}}{x+\sqrt{x^2+7}}-\frac{3x^3+1}{x^4}+2\sqrt[6]{x^5}=5\frac{\sqrt{x^2+7}+x}{\left(x+\sqrt{x^2+7}\right)\sqrt{x^2+7}}-$$

$$-\frac{3x^3+1}{x^4}+2\sqrt[6]{x^5}=\frac{5}{\sqrt{x^2+7}}-\frac{3x^3+1}{x^4}+2\sqrt[6]{x^5}\text{ — верно.}$$

$$б)\int\left(\frac{5}{11x^2+2}+3\cdot 5^x+\frac{16-x^2}{4+x}\right)dx=5\int\frac{dx}{11\left(x^2+\frac{2}{11}\right)}+3\int 5^x dx+$$

$$+\int\frac{(4-x)(4+x)}{4+x}dx=\frac{5}{11}\int\frac{dx}{x^2+\left(\sqrt{\frac{2}{11}}\right)^2}+3\int 5^x dx+4\int dx-\int x\,dx=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\text{используем формулы}\\ \text{13, 5, 2, 3 таблицы интегралов}\end{matrix}\right\}=\frac{5}{11}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{11}}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{\frac{2}{11}}}+3\cdot\frac{5^x}{\ln 5}+$$

$$+4x-\frac{x^{1+1}}{1+1}+C=\frac{5}{\sqrt{22}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{11}{2}}x+3\frac{5^x}{\ln 5}+4x-\frac{x^2}{2}+C.$$

Проверка:

$$\left(\frac{5}{\sqrt{22}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{11}{2}}x+3\frac{5^x}{\ln 5}+4x-\frac{1}{2}x^2+C\right)'=\frac{5}{\sqrt{22}}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{11}{2}}x\right)'+$$

$$+\frac{3}{\ln 5}\left(5^x\right)'+4x'-\frac{1}{2}\left(x^2\right)'+C'=\left\{\begin{matrix}\text{используем формулы 14, 5, 2, 3, 1}\\ \text{таблицы производных}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{5}{\sqrt{22}}\frac{\left(\sqrt{\frac{11}{2}}x\right)'}{1+\frac{11}{2}x^2}+\frac{3}{\ln 5}\cdot 5^x\ln 5+4\cdot 1-\frac{1}{2}2x^{2-1}=\frac{5}{\sqrt{22}}\cdot\frac{\sqrt{\frac{11}{2}}}{\frac{2+11x^2}{2}}+$$

$$+3\cdot 5^x+4-x=\frac{5}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{2}}\frac{\sqrt{11}\cdot 2}{\sqrt{2}\left(2+11x^2\right)}+3\cdot 5^x+\frac{(4-x)(4+x)}{4+x}=$$

$$=\frac{5}{2+11x^2}+3\cdot 5^x+\frac{16-x^2}{4+x}\ \text{— верно.}$$

Метод замены переменной

Теорема 1. Пусть $x=\varphi(t)$ монотонная, непрерывно дифференцируемая функция, тогда

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (1)$$

При этом, если $\int f(\varphi(t)\varphi'(t))\,dt=F(t)+C,$ то $\int f(x)dx=F(\psi(x))+C,$ где $\psi(x)$ — функция, обратная $\varphi(t)$.

Формула (1) называется *формулой замены переменной* в неопределенном интеграле.

Алгоритм замены переменной:

1) Связать старую переменную интегрирования x с новой переменной t с помощью замены $x = \varphi(t)$.

2) Найти связь между дифференциалами $dx = \varphi'(t)dt$.

3) Перейти под знаком интеграла к новой переменной.

4) Проинтегрировать и в полученной первообразной вернуться к старой переменной, подставив $t = \psi(x)$.

Пример 2. Проинтегрировать подходящей заменой переменной.

$а) \int \cos 4x dx;\; б) \int e^{9x+1} dx;\; в) \int x(2-x^2)^5 dx$

Решение:

$$а) \int \cos 4x dx = \left| \begin{array}{c} t = 4x \\ dt = (4x)' = 4dx \\ dx = \dfrac{dt}{4} \end{array} \right| = \int \cos t \frac{dt}{4} = \frac{1}{4}\int \cos t dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{формула 7} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{4}\sin t + C = \frac{1}{4}\sin 4x + C.$$

$$б) \int e^{9x+1} dx = \left| \begin{array}{c} t = 9x+1 \\ dt = (9x+1)' = 9dx \\ dx = \dfrac{dt}{9} \end{array} \right| = \int e^t \frac{dt}{9} = \frac{1}{9}\int e^t dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{формула 6} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{9}e^t + C = \frac{1}{9}e^{9x+1} + C.$$

$$в) \int x(2-x^2)^5 dx = \left| \begin{array}{c} t = 2-x^2 \\ dt = (2-x^2)' = -2xdx \\ xdx = \dfrac{dt}{-2} \end{array} \right| = \int t^5 \left(-\frac{dt}{2}\right) = -\frac{1}{2}\int t^5 dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{формула 3} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{array} \right\} =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{t^6}{6} + C = -\frac{1}{12}(2-x^2)^6 + C.$$

Интегрирование по частям.

Некоторые виды интегралов, вычисляемых по частям

Если производные функций $U = U(x)$ и $V = V(x)$ непрерывны, то справедлива формула:

$$\int U dV = UV - \int V dU, \qquad (3)$$

называемая *формулой интегрирования по частям.*

В качестве $U(x)$ обычно выбирают функцию, которая упрощается при дифференцировании.

Некоторые стандартные случаи функций, интегрируемых по частям, указаны в таблице 1. Там же дается способ выбора множителей U и dV.

Таблица 1

Вид интеграла	$U \to dU$	$dV \to V$
$\int P_n(x)\sin kx\,dx$ $\int P_n(x)\cos kx\,dx$ $\int P_n(x)e^{kx}\,dx$ $n = 1, 2, ...$	$U = P_n(x) \to$ $\to dU = P_n'(x)dx$	$dV = \sin kx\,dx \to V = -\frac{1}{k}\cos kx$ $dV = \cos kx\,dx \to V = \frac{1}{k}\sin kx$ $dV = e^{kx}dx \to V = \frac{1}{k}e^{kx}$

Вид интеграла	$U \to dU$	$dV \to V$
$\int \ln kx\,P_n(x)dx$	$U = \ln kx \to dU = \frac{dx}{x}$	$dV = P_n(x)dx \to$ $\to V = \int P_n(x)dx$
$\int \arcsin kx\,P_n(x)dx$	$U = \arcsin kx \to dU = \frac{kdx}{\sqrt{1-k^2x^2}}$	
$\int \arccos kx\,P_n(x)dx$	$U = \arccos kx \to dU = -\frac{kdx}{\sqrt{1-k^2x^2}}$	
$\int \mathrm{arctg}\,kx\,P_n(x)dx$	$U = \mathrm{arctg}\,kx \to dU = \frac{kdx}{1+k^2x^2}$	
$\int \mathrm{arcctg}\,kx\,P_n(x)dx$	$U = \mathrm{arcctg}\,kx \to dU = -\frac{kdx}{1+k^2x^2}$	

$n=0,1,2,...$	

$P_n(x)$ — многочлен от x степени n, т. е. $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n$, где $a_0\neq 0$.

Пример 3. Проинтегрировать по частям.

а) $\int(3x-1)\sin 2xdx;$ *б)* $\int(1+2x)\ln xdx.$

Решение.

$$а)\int(3x-1)\sin 2xdx=\left|\begin{matrix}U=3x-1\to dU=3dx\\ dV=\sin 2xdx\to V=-\dfrac{\cos 2x}{2}\end{matrix}\right|=(3x-1)(-\frac{\cos 2x}{2})+\int\frac{\cos 2x}{2}dx=$$

$$=-\frac{1}{2}(3x-1)\cos 2x+\frac{3}{2}\int\cos 2xdx=-\frac{1}{2}(3x-1)\cos 2x+\frac{3}{4}\sin 2x+C.$$

$$б)\int(1+2x)\ln xdx=\left|\begin{matrix}U=\ln x\to dU=\dfrac{dx}{x}\\ dV=(1+2x)dx\to\\ V=\int(1+2x)dx=x+x^2\end{matrix}\right|=\ln x(x+x^2)-\int(x+x^2)\frac{dx}{x}=$$

$$=\ln x(x+x^2)-\int(1+x)dx=\ln x(x+x^2)-x-\frac{x^2}{2}+C.$$

Определенный интеграл, его вычисление и свойства

Определенный интеграл от функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a,b]$, вычисляется по формуле:

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a), \tag{5}$$

где $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, т. е. $F'(x)=f(x)$.

Формула (5) называется *формулой Ньютона — Лейбница.*

Свойства определенного интеграла:

$$1)\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx; \qquad 2)\int_a^a f(x)\,dx = 0;$$

$$3)\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx;$$

$$4)\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx;$$

$$5)\int_a^b Cf(x)\,dx = C\int_a^b f(x)\,dx,\ C - \mathrm{const};$$

6) Если $f(x) \le g(x)$ для всех $x \in [a,b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx;$

7) Если $m \le f(x) \le M$ для всех $x \in [a,b]$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a).$$

При вычислении определенного интеграла для нахождения первообразной используют те же методы, что и для нахождения неопределенного интеграла, т. е. замену переменной, интегрирование по частям и т. д. Однако есть ряд особенностей. При замене переменной по формуле (1) необходимо в соответствии с заменой менять пределы интегрирования:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dx, \qquad (6)$$

где $\alpha = \psi(a),\ \beta = \psi(b),\ t = \psi(x)$ — обратная к $x = \varphi(t)$ функция.

Формула интегрирования по частям (3) приобретает вид:

$$\int_a^b UdV = UV\Big|_a^b - \int_a^b VdU, \qquad (7)$$

Пример 4. Вычислить определенный интеграл $\int_1^3 (x^2 - 16x + 3)dx$

Решение.

$$\int_1^3 \left(x^2-16x+3\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-16\cdot\frac{x^2}{2}+3x\right)\Bigg|_1^3=\left(\frac{x^3}{3}-8x^2+3x\right)\Bigg|_1^3=$$

$$=\left(\frac{3^3}{3}-8\cdot 3^2+3\cdot 3\right)-\left(\frac{1^3}{3}-8\cdot 1^2+3\cdot 1\right)=\left(\frac{27}{3}-72+9\right)-\left(\frac{1}{3}-8+3\right)=$$

$$=(9-63)-\left(\frac{1}{3}-5\right)=-54-\frac{1}{3}+5=-49-\frac{1}{3}=-49\frac{1}{3}$$

Содержание практической работы

Задание 1. Вычислить интегралы.

1) $\int\left(\frac{7}{x^2+16}-\frac{x^4+5}{x^5}+3\sqrt{x}\right)dx$ $\quad\int\left(\frac{5}{5x^2+5}+7^x-\frac{\sin 2x}{\cos x}\right)dx$

2) $\int\left(\frac{5}{\sqrt{3+x^2}}-\frac{2x^2+10}{x}+4\sqrt[6]{x^5}\right)dx$ $\quad\int\left(\frac{2}{2x^2+2}+2^x-\frac{x^2-4}{x+2}\right)dx$

3) $\int\left(\frac{2+\sqrt{x}}{x}-\frac{2}{\sqrt{x^2+3}}+4e^x\right)dx$ $\quad\int\left(\frac{12}{3+3x^2}-3\cos x+\frac{x^2-9}{x-3}\right)dx$

4) $\int\left(\frac{8}{\sqrt{5+x^2}}+\frac{6+x^3}{x^4}-3\sqrt[8]{x^5}\right)dx$ $\quad\int\left(\frac{6}{2x^2+2}-2\sin x+3^x\right)dx$

5) $\int\left(\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}+\frac{4x^2-1}{x^3}-2\sqrt[8]{x^3}\right)dx$ $\quad\int\left(\frac{6}{3x^2-9}+\frac{3\sin^3 x-5}{\sin^2 x}\right)dx$

6) $\int\left(\frac{3\cos^3 x-2}{\cos^2 x}-5\sqrt[5]{x^3}\right)dx$ $\quad\int\left(\frac{16}{2x^2-8}-\frac{3-x^3}{x^4}+5^x\right)dx$

Задание 2. Проинтегрировать подходящей заменой переменного.

1) $\int\frac{dx}{\sin^2 3x}$ $\quad\int\frac{xdx}{\sqrt{2+x^2}}$ $\quad\int e^{1-3x}\,dx$

2) $\int(2x-1)\cos(x^2-x)\,dx$ $\quad\int x\sqrt{5+x^2}\,dx$ $\quad\int e^{6x+5}\,dx$

3) $\int 10^{2x+1}\,dx$ $\quad\int\sin\frac{x}{2}dx$ $\quad\int\frac{dx}{5x+3}$

4) $\int x^2(3-x^3)^{10}\,dx$ $\quad\int\cos 2x\,dx$ $\quad\int e^{\sin x}\cos x\,dx$

5) $\int \frac{dx}{x \ln x}$ $\qquad \int \sin 2x\,dx$ $\qquad \int 3^{7x-1}\,dx$

6) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad \int \sin(2-3x)dx$ $\qquad \int \frac{dx}{e^{3x}}$

Задание 3. Проинтегрировать по частям.

1) $\int (7x-1)\cos x\,dx$ $\qquad \int \operatorname{arctg} x\,dx$

2) $\int (6-5x)\,e^x\,dx$ $\qquad \int (7x+5)\ln x\,dx$

3) $\int x\cos x\,dx$ $\qquad \int \operatorname{arcctg} x\,dx$

4) $\int (1+2x)\cos x\,dx$ $\qquad \int \arcsin x\,dx$

5) $\int (8x-1)\sin 5x\,dx$ $\qquad \int (6+5x)\ln x\,dx$

6) $\int xe^x\,dx$ $\qquad \int (3x+2)\ln x\,dx$

Задание 4. Вычислить определенный интеграл.

1) $\int_1^2 (x^3+10x)dx$ $\qquad$ 4) $\int_0^8 (21x-19)dx$

2) $\int_{-2}^3 (3x^2+6x-2)dx$ $\qquad$ 5) $\int_{-4}^0 (x^3+8)dx$

3) $\int_1^3 (x^2-16x+3)dx$ $\qquad$ 6) $\int_{10}^{13} (2x+7)dx$

Практическая работа № 4-6

Тема: Отработка техники дифференцирования. Решение дифференциального интеграла. Решение прикладных задач.

Цель: сформировать умение применять определенный интеграл для вычисления площадей, длин и объемов фигур.

Теоретические сведения к практической работе

Площади плоских фигур

1. Вычисление площадей плоских фигур в декартовой системе координат

Если плоская фигура (рис. 1) ограничена линиями $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, где $f_2(x) \quad f_1(x)$ для всех $x \in [a, b]$, и прямыми $x = a$, $x = b$, то ее площадь вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx. \qquad (8)$$

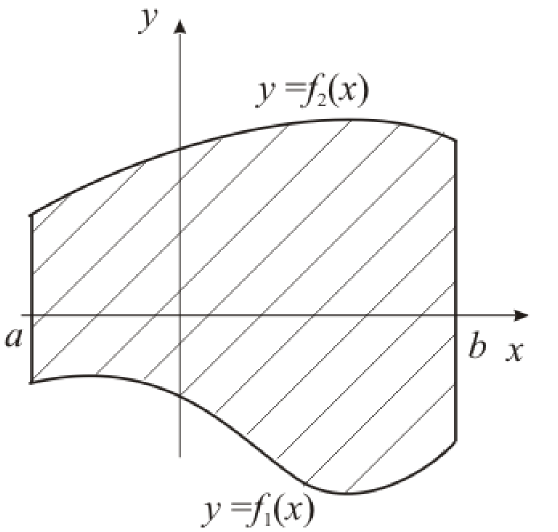


Рис. 1

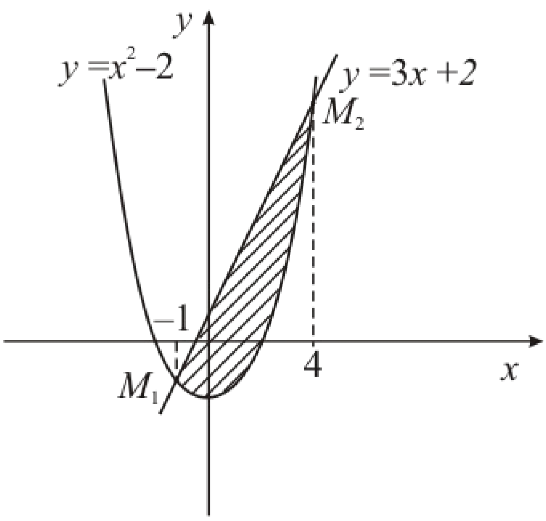


Рис. 2

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$y = x^2 - 2,\ y = 3x + 2.$

*Решение***.** Построим схематический рисунок (рис. 2). Для построения параболы возьмем несколько точек:

x	0	1	–1	2	–2	3	–3	4	–4

y	–2	–1	–1	2	2	7	7	14	14

Для построения прямой достаточно двух точек, например $(0, 2)$ и $(-1, -1)$.

Найдем координаты точек M_1 и M_2 пересечения параболы $y = x^2 - 2$ и прямой $y = 3x + 2$.

Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 - 2, \\ y = 3x + 2. \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2 = 3x + 2, \quad x^2 - 3x - 4 = 0, \quad x_1 = -1, \; x_2 = 4.$$

Тогда $y_1 = 3 \cdot (-1) + 2 = -1, \; y_2 = 3 \cdot 4 + 2 = 14.$ Итак, $M_1(-1,-1), \; M_2(4,14).$

Площадь полученной фигуры найдем по формуле (8), в которой $f_2(x) = 3x + 2, \; f_1(x) = x^2 - 2,$ поскольку $f_2(x) \quad f_1(x)$ для всех $x \in [-1, 4]$. Получим:

$$S = \int_{-1}^{4} \left(3x + 2 - \left(x^2 - 2 \right) \right) dx = \int_{-1}^{4} \left(3x - x^2 + 4 \right) dx = \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 4x \right) \Bigg|_{-1}^{4} =$$

$$= \frac{3 \cdot 4^2}{2} - \frac{4^3}{3} + 4 \cdot 4 - \left(\frac{3 \cdot (-1)^2}{2} - \frac{(-1)^3}{3} + 4 \cdot (-1) \right) = 24 - \frac{64}{3} + 16 - \frac{3}{2} - \frac{1}{3} + 4 =$$

$$= 44 - \frac{65}{3} - \frac{3}{2} = \frac{125}{6} = 20\frac{5}{6} \; (\text{кв.ед.})$$

2. Вычисление площадей фигур, ограниченных линиями, заданными параметрически

Если функции $y = y(t)$ и $x = x(t)$ имеют непрерывные производные первого порядка для всех $t \in [t_0, t_1]$, то площадь плоской фигуры, ограниченной линией $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \; t \in [t_0, t_1]$, прямыми $x = a$, $x = b$, где $a = x(t_0)$, $b = x(t_1)$, и осью OX, вычисляется по формуле:

$$S=\left|\int_{t_0}^{t_1} y(t)\,x'(t)\,dt\right|. \tag{9}$$

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными параметрически:

$x=2\cos t,\ y=3\sin t,\ 0\le t\le 2\pi.$

Решение. Для построения фигуры составим таблицу значений координат (*x*, *y*) точек кривой, соответствующих различным значениям параметра $t,\ 0\le t\le 2\pi.$

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	2	0	–2	0	2
y	0	3	0	–3	0

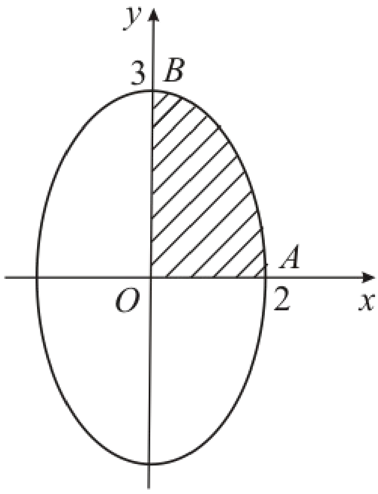


Рис. 3

Нанесем точки (*x*, *y*) на координатную плоскость *XOY* и соединим плавной линией. Когда параметр t изменяется от 0 до 2π, соответствующая точка (x,y) описывает эллипс (известно, что $\begin{cases}x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{cases},\ 0\le t\le 2\pi$ — параметрические формулы, задающие эллипс с полуосями *a* и *b*). Учитывая симметрию фигуры относительно координатных осей *OX* и *OY*, найдем её площадь *S*, умножив на 4 площадь криволинейной трапеции *AOB*. Согласно формуле (9) получим:

$$S=4\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin t(2\cos t)'\,dt\right|=4\left|-6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,dt\right|=\left\{\begin{matrix}\text{используем формулу}\\ \text{понижения степени}\\ \text{для } \sin^2\alpha \text{ из таблицы 2}\end{matrix}\right\}=$$

$$=4\left|-6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(1-\cos 2t)\,dt\right|=4\left|-3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)\,dt\right|=4\left|-3\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right|=$$

$$=4\left|-3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\sin\pi-\left(0-\frac{1}{2}\sin 0\right)\right)\right|=4\left|-3\frac{\pi}{2}\right|=6\pi\approx 18{,}850\ (\text{кв. ед.}).$$

Длина дуги плоской кривой

1. Вычисление дуги плоской кривой в декартовых координатах

Если кривая задана уравнением $y = f(x)$, функция $f(x)$ имеет непрерывную первую производную при всех $x \in [a, b]$, то длина дуги $\overset{\smile}{AB}$ (рис. 4) этой кривой, заключенной между точками $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$, вычисляется по формуле:

$$l_{\overset{\smile}{AB}} = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx. \qquad (10)$$

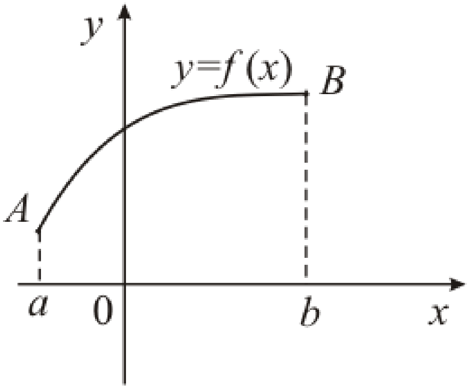


Рис. 4

2. Вычисление длины дуги кривой, заданной параметрически

Если кривая задана параметрически $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t_0 \le t \le t_1$, и функции $x(t)$, $y(t)$ имеют непрерывные производные 1-го порядка при всех $t \in [t_0, t_1]$, то длина дуги $\overset{\smile}{AB}$, соответствующей изменению параметра от t_0 до t_1, вычисляется по формуле:

$$l_{\overset{\smile}{AB}} = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,dt. \qquad (11)$$

Пример. Найти длину дуги кривой

а) $y = x^{3/2}$, $0 \le x \le 1$; б) $x = 2\cos t - \cos 2t$, $y = 2\sin t - \sin 2t$, $0 \le t \le 2\pi$.

Решение.

а) Так как кривая задана в декартовой системе координат уравнением $y = f(x)$, то для вычисления длины дуги воспользуемся формулой (10).

Найдем y': $\quad y' = \dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ и подставим в (10):

$$l_{AB}=\int_0^1\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{1+\frac{9x}{4}}dx=\left|\begin{array}{l}t=1+\frac{9x}{4}, dt=\frac{9}{4}dx, dx=\frac{4}{9}dt,\\ x=0\to t=1,\\ x=1\to t=1+\frac{9}{4}=\frac{13}{4}.\end{array}\right|=$$

$$=\frac{4}{9}\int_1^{13/4}t^{\frac{1}{2}}dt=\left\{\begin{array}{l}\text{формула 3}\\ \text{таблицы}\\ \text{интегралов}\end{array}\right\}=\frac{4}{9}\left.\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right|_1^{13/4}=\left.\frac{8}{27}t^{\frac{3}{2}}\right|_1^{13/4}=\frac{8}{27}\left(\left(\frac{13}{4}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right)=$$

$$=\frac{8}{27}\left(\frac{13\sqrt{13}}{8}-1\right)\approx 1{,}440\ (\text{единиц длины}).$$

б) $x=2\cos t-\cos 2t,\ y=2\sin t-\sin 2t,\ 0\le t\le 2\pi.$

Кривая задана параметрически, поэтому воспользуемся формулой (11). Найдем $x'(t),\ y'(t)$:

$x'(t)=-2\sin t+2\sin 2t,\ y'(t)=2\cos t-2\cos 2t$ и подставим в (11):

$$l_{AB}=\int_0^{2\pi}\sqrt{(-2\sin t+2\sin 2t)^2+(2\cos t-2\cos 2t)^2}\,dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{4\sin^2 t-8\sin t\sin 2t+4\sin^2 2t+4\cos^2 t-8\cos t\cos 2t+4\cos^2 2t}\,dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{4\left(\sin^2 t+\cos^2 t\right)+4\left(\sin^2 2t+\cos^2 2t\right)-8\left(\cos t\cos 2t+\sin t\sin 2t\right)}\,dt=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{используем тригонометрические формулы}\\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \text{ и } \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\end{array}\right\}=\int_0^{2\pi}\sqrt{8-8\cos t}\,dt=$$

$$=\sqrt{8}\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos t}\,dt=\left\{\begin{array}{l}\text{используем формулу}\\ \sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)\Rightarrow\\ \Rightarrow 1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}\end{array}\right\}=2\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}}dt=$$

$$=4\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt=\left.-8\cos\frac{t}{2}\right|_0^{2\pi}=-8(\cos\pi-\cos 0)==-8(-1-1)=16(\text{единиц длины}).$$

Вычисление объемов тел вращения

Если тело образовано вращением вокруг оси OX криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью OX и прямыми $x = a$, $x = b$ (рис. 5), то его объем вычисляется по формуле:

$$V = \pi \int_a^b \left(f(x) \right)^2 dx. \qquad (12)$$

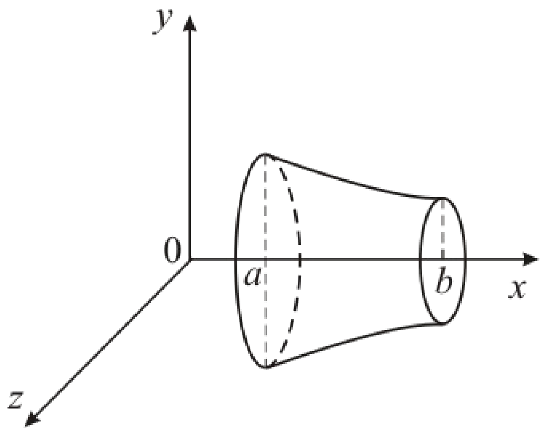


Рис. 5

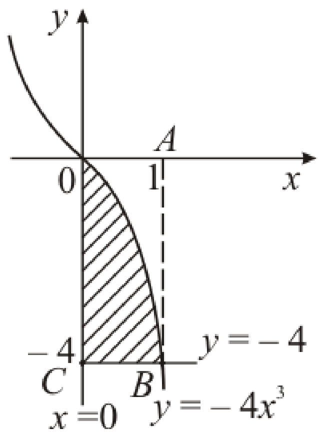


Рис. 6

Пример. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями: $y = -4x^3$, $x = 0$, $y = -4$.

Решение. Построим криволинейную трапецию, вращением которой получается тело вращения (рис. 6).

Чтобы получить объем тела вращения из объема V_1 тела, полученного вращением фигуры $OABC$, вычтем объем V_2 тела, полученного вращением фигуры OAB. Тогда искомый объем $V = V_1 - V_2$. По формуле (12) найдем V_1 и V_2:

$$V_1 = \pi \int_0^1 (-4)^2 dx = \pi 16x \Big|_0^1 = 16\pi \text{ (ед. объема);}$$

$$V_2 = \pi \int_0^1 \left(-4x^3 \right)^2 dx = 16\pi \int_0^1 x^6 dx = 16\pi \frac{x^7}{7} = \frac{16\pi}{7} \text{ (ед. объема);}$$

$$V = V_1 - V_2 = 16\pi - \frac{16\pi}{7} = \frac{96}{7}\pi \approx 43{,}085 \text{ (ед. объема).}$$

Содержание практической работы

Задание 1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями.

1) $y = x^2 - 2,\ y = 1 - 2x$

2) $y = x^3,\quad y = 8,\quad x = 0$

3) $y = 3x^2 + 1,\quad y = 3x + 6$

4) $y = x^2,\ y = x + 1$

5) $y = x^2,\ y = 2 - x^2$

6) $y = x^2 - 1,\ y = 1 - x$

Задание 2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными параметрически.

1) $x = 2t - t^2,\quad y = t(t-1),\quad 0 \le t \le 1$

2) $x = t^2 - 1,\quad y = t^3 - t,\quad 0 \le t \le 1$

3) $x = 2\sin t,\quad y = \cos t,\quad 0 \le t \le 2\pi$

4) $x = \ln t,\quad y = (t-1)(3-t),\quad 1 \le t \le 3$

5) $x = 1 - \cos t,\quad y = \sin t,\quad 0 \le t \le 2\pi$

6) $x = \cos t,\quad y = 1 - \sin t,\quad 0 \le t \le 2\pi$

Задание 3. Найти длину дуги кривой.

1) $y = 1 + \ln\cos x,\ 0 \le x \le \dfrac{\pi}{3}$

2) $x = t^2 - 1,\ y = t^3,\ 0 \le t \le 1$

3) $y = x^{\frac{2}{3}} + 1,\quad 0 \le x \le 1$

4) $x = t^2 - 1,\quad y = \dfrac{t}{3} - t^3,\quad 1 \le t \le 2$

5) $y = x^{\frac{2}{3}},\ 0 \le x \le \frac{1}{2}$

6) $x = t^3 - 4,\ y = t^2,\ 0 \le t \le 2$

Задание 4. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями.

1) $x^2 - y = 0, \quad y = 1$

2) $x^2 + y = 0, \quad y = -1$

3) $x - y^2 = 0, \quad x = 1$

4) $y = 4x^3, \quad x = 0, \quad y = -4$

5) $y = 4x^3, \quad x = 1, \quad y = 0$

6) $y = -4x^3, \quad x = -1, \quad y = 0$

Практическая работа №7-8

Тема: Вычисление элементов теории вероятности

Цель: сформировать умение решать задачи на нахождение вероятностей

Теоретические сведения к практической работе

Классическое определение вероятности

Раздел математики, изучающий закономерности случайных событий, называется теорией вероятностей.

Вероятностью P(A) события A в испытании с равновозможными элементарными исходами называют отношение числа исходов m, благоприятствующих событию A, к числуn всех исходов испытания.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Пример 1: В партии из 30 миксеров 2 бракованных. Найти вероятность купить исправный миксер.

$$n = 30, m = 30 - 2 = 28$$

$$P = \frac{28}{30} = \frac{14}{15}$$

Аксиомы вероятностей:

Каждому событию A поставлено в соответствие неотрицательное число P(A), называемое вероятностью события A.

Если события A_1, A_2 … попарно несовместны, то $P(A_1+A_2+\ldots)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots$

Свойства вероятностей:

Вероятность невозможного события равна нулю P=0.

Вероятность достоверного события равна единице P=1.

Вероятность произвольного случайного события A заключается между 0 и 1: $0<P(A)<1$.

Пример 2: Из 34 экзаменационных билетов, пронумерованных с помощью чисел от 1 до 34, наудачу извлекается один. Какова вероятность, что номер вытянутого билета есть число, кратное трем.

Решение: Найдем количество чисел от 1 до 34, кратных трем. Это числа 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33. Всего таких чисел 11. Таким образом, искомая вероятность $p=\frac{11}{34}$

События А и В называются совместными, если они могут одновременно произойти, и несовместными, если при осуществлении одного события не может произойти другое.

События А и В называются независимыми, если вероятность наступления одного события не зависит от того, произошло другое событие или нет.

Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей слагаемых без вероятности произведения: P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)

Пример 3: Вероятность поражения одной мишени – 0,7, а другой – 0,8. Какова вероятность, что будет поражена хотя бы одна мишень, если по ним стреляют независимо друг от друга.

Решение: Т.к. события совместны, то $p = 0,7 + 0,8 - 0,7 \cdot 0,8 = 1,5 - 0,56 = 0,94$

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей слагаемых: P(A+B)=P(A)+P(B).

$$P(A)+P(\bar{A})=1$$

Условная вероятность – вероятность одного события, при условии, что другое событие уже произошло.

Вероятность произведения событий А и В равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого: P(AB)=P(A)·P(A/B) или P(BA)=P(A)·P(B/A)

Вероятность произведения двух независимых событий А и В равна произведению вероятностей сомножителей: P(AB)=P(A)·P(B).

Пример 4: В двух коробках лежат ручки разного цвета. В первой коробке – 4 красных и 6 черных, во второй – 3 красных, 5 синих и 2 черных. Из обеих коробок вынимают по одной ручки. Найти вероятность, что обе ручки красные.

Решение: Найдем вероятности вытащить красную ручку из каждой коробки

$n_1 = 10$

$m_1 = 4$

$p_1 = \frac{4}{10}$

$n_2 = 10$

$m_2 = 3$

$p_2 = \frac{3}{10}$

Тогда вероятность того, что обе ручки красные: $p = p_1 \cdot p_2 = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{12}{100} = 0{,}12$

Полная вероятность. Формула Байеса

Если событие А может произойти только при выполнении одного из событий H_1, H_2, …, которые образуют полную группу несовместных событий, то вероятность события А вычисляется по формуле

$$p(\mathrm{A}) = \mathrm{p}(\mathrm{H}_1) \cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\mathrm{H}_1) + \mathrm{p}(\mathrm{H}_2) \cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\mathrm{H}_2) + \mathrm{p}(\mathrm{H}_3) \cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\mathrm{H}_3) + \ldots$$

Эта формула называется формулой полной вероятности.

Если выполняются все условия, имеющие место для формулы полной вероятности, и $p(\mathrm{A}) \neq 0$, то выполняется равенство, называемое формулой Байеса:

$$p(\mathrm{H}_i/\mathrm{A}) = \frac{\mathrm{p}(\mathrm{H}_i) \cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\mathrm{H}_i)}{p(\mathrm{A})}$$

Пример 1: В первой партии 20 ламп, во второй – 30 ламп и в третьей – 50 ламп. Вероятности того, что проработает заданное время, равна для первой партии 0,7, для второй – 0,8 и для третьей партии – 0,9. Какова вероятность того, что наудачу взятая лампа проработает заданное время? Найти вероятность, что эта лампа принадлежит первой партии?

Решение: Пусть событие А – наудачу взятая лампа проработает заданное время.

Тогда, пусть H_1 – лампа из первой партии, H_2 – лампа из второй партии и H_3 – лампа из третьей партии. Тогда событие A/H_1 – лампа из первой партии проработает заданное время, A/H_2 – лампа из второй партии проработает заданное время и A/H_3 – лампа из третьей партии проработает заданное время. Найдем вероятности

$$n = 20 + 30 + 50 = 100$$

$$p(\mathrm{H}_1) = \frac{20}{100} = 0,2$$

$$p(\mathrm{H}_2) = \frac{30}{100} = 0,3$$

$$p(\mathrm{H}_3) = \frac{50}{100} = 0,5$$

$$p(\mathrm{A/\,H}_1) = 0,7$$

$$p(\mathrm{A/\,H}_2) = 0,8$$

$$p(\mathrm{A/\,H}_3) = 0,9$$

$$p(\mathrm{A}) = \mathrm{p}(\mathrm{H}_1)\cdot \mathrm{p}(\mathrm{A/\,H}_1) + \mathrm{p}(\mathrm{H}_2)\cdot \mathrm{p}(\mathrm{A/\,H}_2) + \mathrm{p}(\mathrm{H}_3)\cdot \mathrm{p}(\mathrm{A/\,H}_3) =$$
$$= 0,2\cdot 0,7 + 0,3\cdot 0,8 + 0,5\cdot 0,9 = 0,14 + 0,24 + 0,45 = 0,83$$

Теперь, используя формулу Байеса найдем вероятность того, что эта лампа принадлежит первой партии

$$p(\mathrm{H}_1/\,\mathrm{A}) = \frac{\mathrm{p}(\mathrm{H}_1)\cdot \mathrm{p}(\mathrm{A/\,H}_1)}{p(\mathrm{A})} = \frac{0,2\cdot 0,7}{0,83} \approx 0,169$$

Пример 2: Имеются 3 одинаковые урны. В первой урне находятся 5 белых и 7 черных шаров, во второй – только белые и в третьей – только черные. Наугад выбираются урна и из нее извлекается один шар. Какова вероятность, что этот шар белый?

Решение: Пусть событие А – извлекается белый шар.

Тогда, пусть H_1 – шар из первой урны, H_2 – шар из второй урны и H_3 – шар из третьей урны. Тогда событие A/H_1 – белый шар из первой урны, A/H_2 – белый шар из второй урны и A/H_3 – белый шар из третьей урны. Найдем вероятности

$$p(\mathrm{H}_1) = \frac{1}{3}$$

$$p(\mathrm{H}_2) = \frac{1}{3}$$

$$p(\mathrm{H}_3) = \frac{1}{3}$$

$$p(\mathrm{A}/\,\mathrm{H}_1) = \frac{5}{12}$$

$$p(\mathrm{A}/\,\mathrm{H}_2) = 1$$

$$p(\mathrm{A}/\,\mathrm{H}_3) = 0$$

$$p(\mathrm{A}) = \mathrm{p}(\mathrm{H}_1)\cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\,\mathrm{H}_1) + \mathrm{p}(\mathrm{H}_2)\cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\,\mathrm{H}_2) + \mathrm{p}(\mathrm{H}_3)\cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\,\mathrm{H}_3) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{12} + \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 0 = \frac{5}{36} + \frac{1}{3} = \frac{17}{36}$$

Формула Бернулли

1) Вероятность того, что событие А наступит ровно m раз при проведении n независимых испытаний, каждый из которых имеет ровно два исхода вычисляется по формуле Бернулли $P_n(\mathrm{m}) = \mathrm{C}_n^m\, p^m (1-p)^{n-m}, m = 0,1,2,\ldots,n$

Пример 1: Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету равна 0,2. Найти вероятность, что из 6 приобретенных билетов 2 окажутся выигрышными.

Решение:

$$p = 0,2$$

$$n = 6$$

$$m = 2$$

$$P_n(\mathrm{m}) = \mathrm{C}_n^m\, p^m (1-p)^{n-m} = \mathrm{C}_6^2\, 0,2^2 (1-0,2)^{6-2} = \frac{6!}{4!\cdot 2!}\cdot 0,04\cdot 0,8^4 \approx 0,246$$

2) Вероятность наступления события А хотя бы один раз при проведении n независимых испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли, равна $P_n(\mathrm{m}\quad 1) = 1 - \mathrm{q}^n, q = 1 - p$

Пример 2: Прибор состоит из шести элементов, работающих независимо друг от друга. Вероятность безотказной работы каждого элемента за определенное время равна 0,6. Для безотказной работы прибора необходимо, чтобы хотя бы один элемент был исправен. Какова вероятность, что за данное время прибор будет работать безотказно?

Решение:

$p = 0,6 \Rightarrow \quad q = 0,4$

$n = 6$

$m \quad 1$

$P_6(\mathrm{m} \quad 1) = 1 - 0,4^6 \approx 0,9959$

3) Вероятность наступления события А хотя бы один раз при проведении n независимых испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли, наступит не менее m_1 и не более m_2 раз вычисляется по формуле $P_n(\mathrm{m}_1 \le \mathrm{m} \le \mathrm{m}_2) = \sum\limits_{m_1}^{m_2} P_n(\mathrm{m})$

Пример 3: Найти вероятность осуществления от двух до четырех разговоров по телефону при наблюдении пяти независимых вызовов, если вероятность того, что разговор состоится, равна 0,7.

Решение:

$p = 0,7$

$n = 5$

$2 \le m \le 4$

$P_5(2 \le m \le 4) = \mathrm{C}_5^2 \cdot 0,7^2(1-0,7)^{5-2} + \mathrm{C}_5^3 \cdot 0,7^3(1-0,7)^{5-3} + \mathrm{C}_5^4 \cdot 0,7^4(1-0,7)^{5-4} \approx 0,801$

4) Наивероятнейшее значение m_0 числа наступления события А при проведении n повторных независимых испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли, вычисляется по формуле

$np - q \le m_0 \le np + p$

$np - (1-p) \le m_0 \le np + p$

Пример 4: Магазин получил 50 деталей. Вероятность наличия нестандартной детали в партии равна 0,05. Найти наиболее вероятное число нестандартных деталей в партии.

Решение:

$p = 0,05$

$n = 50$

$m_0 - ?$

$q = 1 - p = 1 - 0,05 = 0,95$

$50 \cdot 0,05 - 0,95 \le m_0 \le 50 \cdot 0,05 + 0,05$

$1,55 \le m_0 \le 2,55$

$m_0 = 2$

Дискретная случайная величина и ее числовые характеристики

Случайная величина X – это числовая функция $X = f(\omega_i)$, определенная на пространстве элементарных событий. Случайные величины, имеющие счетные множества возможных значений, называются дискретными. Дискретная случайная величина определена, если известны все ее значения и соответствующие им вероятности. Соотношение между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями называют распределением вероятностей случайной величины. Для дискретной случайной величины это соответствие может быть записано в виде таблицы: $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

x_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

Математическим ожиданием (средним значением) дискретной случайной величины X называют сумму произведений всех ее возможных значений на соответствующие им вероятности $M(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$

Дисперсией дискретной случайной величины X называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания $D(\mathrm{X}) = M(\mathrm{X} - M(\mathrm{X}))^2$. Дисперсия дискретной случайной величины вычисляется по формулам:

$$D(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - m \right)^2 p_i$$

$$D(\mathrm{X}) = M(\mathrm{X}^2) - (M(\mathrm{X}))^2$$

Средним квадратичным отклонением дискретной случайной величины называют корень квадратный из дисперсии $\sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{D(\mathrm{X})}$.

Если случайная величина X имеет биномиальное распределение вероятностей, то

$$M(\mathrm{X}) = \mathrm{np} \quad D(\mathrm{X}) = \mathrm{npq}$$

Пример 1: Случайная величина X задана таблицей распределения вероятностей. Найти M(X), D(X), σ(X).

x_i	2	5	8	9
p_i	0,1	0,4	0,3	0,2

Решение:

$$M(\mathrm{X}) = 2\cdot 0,1 + 5\cdot 0,4 + 8\cdot 0,3 + 9\cdot 0,2 = 0,2 + 2 + 2,4 + 1,8 = 6,4$$
$$M(\mathrm{X}^2) = 4\cdot 0,1 + 25\cdot 0,4 + 64\cdot 0,3 + 81\cdot 0,2 = 45,8$$
$$D(\mathrm{X}) = 45,8 - 6,4^2 = 4,84$$
$$\sigma(X) = \sqrt{D(\mathrm{X})} = \sqrt{4,84} = 2,2$$

Пример 2: Найти математическое ожидание и дисперсию числа лотерейных билетов, на которые выпадут выигрыши, если приобретено 100 билетов, а вероятность выигрыша на каждый билет равна 0,05.

Решение:

$$M(\mathrm{X}) = 100\cdot 0,05 = 5$$
$$D(\mathrm{X}) = 100\cdot 0,05\cdot 0,95 = 4,75$$
$$\sigma(X) = \sqrt{D(\mathrm{X})} = \sqrt{4,75} = 2,18$$

Содержание практической работы

Задание 1. Используя классическое определение вероятности события, решить следующие задачи:

1. В коробке 4 красных, 5 зеленых, 8 желтых, 7 белых и 1 черный шар. Найти вероятность вытащить: красный шар; синий шар; белый шар; цветной шар; или зеленый или белый шар; не красный шар; шар одного из цветов светофора.

2. В семье – двое детей. Какова вероятность, что старший ребенок – девочка, если известно, что в семье есть дети обоего пола?

3. Мастер, имея 10 деталей, из которых 4 – нестандартных, проверяет детали одну за другой, пока ему не попадется стандартная. Какова вероятность, что он проверит ровно две детали?

4. В одном ящике 3 белых и 7 черных шаров, в другом ящике – 6 белых и 8 черных шара. Найти вероятность того, что хотя бы из одного ящика будет вынут белый шар, если из каждого ящика вынуто по одному шару.

5. Издательство отправило газеты в три почтовых отделения. Вероятность своевременной доставки газет в первое отделение равна 0,9, во второе - 0,7, в третье - 0,85. Найти вероятность следующих событий:

а) только одно отделение получит газеты вовремя;

б) хотя бы одно отделение получит газеты с опозданием.

6. В первой урне находятся 12 белых и 4 черных шаров, а во второй 5 белых и 10 черных шаров. Из каждой урны вынули по шару. Какова вероятность того, что оба шара окажутся черными? Какова вероятность, что оба шара окажутся белыми?

7. В партии из 25 деталей находятся 8 бракованных. Вынимают из партии наудачу две детали. Определить, какова вероятность того, что обе детали окажутся бракованными.

8. Подброшены две игральные кости. Найти вероятность события А того, что выпадет хотя бы одна шестерка.

9. Найти вероятность, что при бросании игральной кости выпадет число, большее 4.

10. Найти вероятность, что при бросании игральной кости выпадет число, не меньшее 2 и не большее 5.

Задание 2. Используя формулы полной вероятности и Байеса, решить следующие задачи:

1. Имеются 2 одинаковые урны. В первой урне находятся 7 белых и 3 черных шаров, во второй – 6 белых и 4 черных. Наугад выбираются урна и из нее извлекается один шар. Выбранный шар оказался черным. Какова вероятность, что этот шар из 2 урны?

2. Детали, изготовляемые цехом завода, попадают для проверки их на стандартность к одному из двух контролеров. Вероятность того, что деталь попадет к первому контролеру =0,5, ко второму =0,6. Вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной первым контролером =0,94, а вторым =0,92. Годная деталь при проверке была признана стандартной. Найти вероятность того, что эту деталь проверил первый контролер.

3. Имеется два набора деталей. Вероятность того, что деталь первого набора стандартная равна 0,9, а второго – 0,8. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь – стандартная.

4. Имеются 3 одинаковые урны. В первой урне находятся 6 синих и 4 черных шаров, во второй – только синие и в третьей – только черные. Наугад выбираются урна и из нее извлекается один шар. Какова вероятность, что этот шар синий?

5. Имеются 2 одинаковые урны. В первой урне находятся 7 белых и 3 черных шаров, во второй – 6 белых и 4 черных. Наугад выбираются урна и из нее извлекается один шар. Выбранный шар оказался черным. Какова вероятность, что этот шар из 1 урны?

Задание 3. Используя формулу Бернулли, решить следующие задачи:

1. Вероятность того, что расход электроэнергии на продолжении одних суток не превысит установленной нормы равна 0,75. Найти вероятность

того, что в ближайшие 6 суток расход электроэнергии в течение 4 суток не превысит нормы.

2. Найти вероятность осуществления от одного до трех разговоров по телефону при наблюдении шести независимых вызовов, если вероятность того, что разговор состоится, равна 0,6.

3. Прибор состоит из пяти элементов, включенных в цепь параллельно и работающих независимо друг от друга. Вероятность безотказной работы каждого элемента за время Т равна 0,5. Для безаварийной работы прибора достаточно, чтобы хотя бы один элемент был исправен. Какова вероятность того, что за время Т прибор будет работать безотказно?

4. Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету =0,3. Какова вероятность того, что из семи приобретенных билетов три билета окажутся выигрышными?

5. Магазин получил 40 деталей. Вероятность наличия нестандартной детали в партии равна 0,04. Найти наиболее вероятное число нестандартных деталей в этой партии.

6. Вероятность изготовления на автоматическом станке стандартной детали равна 0,8. Найдя вероятности возможного числа появления бракованных деталей среди 5 отобранных, найти наивероятнейшее число появления бракованных деталей из 5 отобранных, указав его вероятность.
7. Сколько раз необходимо подбросить игральную кость, чтобы наивероятнейшее выпадение тройки было равно 10?
8. Для данного участника игры вероятность набросить кольцо на колышек =0,3. Какова вероятность того, что при шести бросках 3 кольца окажутся на колышке?
9. На самолете имеются 4 одинаковых двигателя. Вероятность нормальной работы каждого двигателя в полете равна р. Найти вероятность того, что в полете могут возникнуть неполадки в одном двигателе.
10. Вероятность отказа каждого прибора при испытании равна 0,4. Что вероятнее ожидать: отказ двух приборов при испытании четырех или отказ трех приборов при испытании шести, если приборы испытываются независимо друг от друга?
11. Вероятность того, что на некотором предприятии расход электроэнергии не превысит суточной нормы равна 0,8. Какова вероятность того, что в течение пяти рабочих дней из семи перерасхода электроэнергии не будет?

Задание 4. Найти числовые характеристики дискретных случайных величин:

1. Найти математическое ожидание случайной величины X, зная закон ее распределения:

x_i	3	5	2
p_i	0,1	0,6	0,3

2. Вероятность попадания в цель при стрельбе из орудия 0,6. Найти математическое ожидание общего числа попаданий, если будет произведено 10 выстрелов.

3. Найти дисперсию случайной величины X, которая задана следующим законом распределения:

x_i	1	2	5
p_i	0,3	0,5	0,2

4.Найти дисперсию случайной величины X, которая задана следующим законом распределения:

x_i	2	3	5
p_i	0,1	0,6	0,3

5. Производится 10 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события равна 0,6. Найти дисперсию случайной величины X – числа появления события в этих испытаниях.

Практическая работа № 9-10.

Тема: Решение прикладных задач.

Цель: сформировать умение выполнять операции с множествами

Теоретические сведения к практической работе

Множество – одно из основным понятий математики.

Множеством называется совокупность некоторых элементов, объединенных каким-либо общим признаком. Элементами множества могут быть числа, фигуры, предметы, понятия и т.п.

Множества обозначаются прописными буквами, а элементы множество строчными буквами. Элементы множеств заключаются в фигурные скобки.

Если элемент x принадлежит множеству X, то записывают $x \in X$ ($\in$ — принадлежит).

Если множество A является частью множества B, то записывают $A \subset B$ ($\subset$ — содержится).

Множество может быть задано одним из двух способов: перечислением и с помощью определяющего свойства.

Два множества A и B равны (A=B), если они состоят из одних и тех же элементов.

Например, если $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{3,1,4,2\}$ то A=B.

Объединением (суммой) множеств A и B называется множество $A \cup B$, элементы которого принадлежат хотя бы одному из этих множеств.

Например, если $A=\{1,2,4\}$, $B=\{3,4,5,6\}$, то $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$

Пересечением (произведением) множеств A и B называется множество $A \cap B$, элементы которого принадлежат как множеству A, так и множеству B.

Например, если A={1,2,4}, B={3,4,5,2}, то $A \cap B = \{2,4\}$

Разностью множеств A и B называется множество AB, элементы которого принадлежат множесву A, но не принадлежат множеству B.

Например, если A={1,2,3,4}, B={3,4,5}, то AB = {1,2}

Симметричной разностью множеств A и B называется множество $A \Delta B$, являющееся объединением разностей множеств AB и BA, то есть $A \Delta B = (AB) \cup (BA)$.

Например, если A={1,2,3,4}, B={3,4,5,6}, то $A \Delta B = \{1,2\} \cup \{5,6\} = \{1,2,5,6\}$

Свойства:

Свойства перестановочности:

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

Сочетательное свойство:

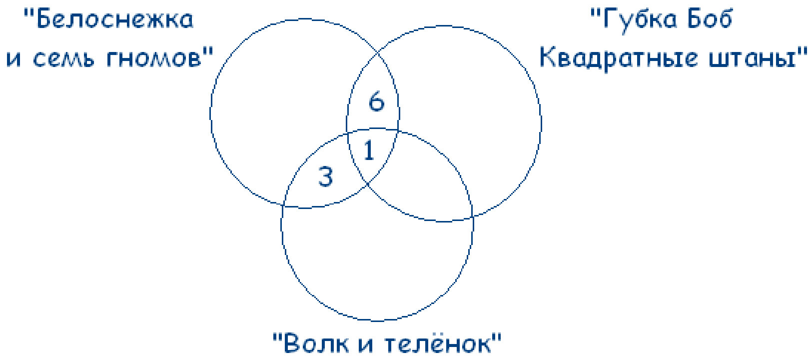
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

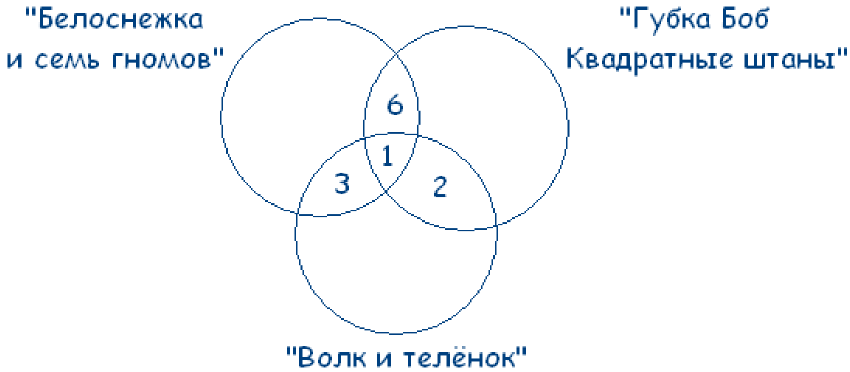
Круги Эйлера (Эйлера-Вена) — геометрическая схема, с помощью которой можно изобразить отношения между подмножествами, для наглядного представления.

Пример: Среди школьников шестого класса проводилось анкетирование по любимым мультфильмам. Самыми популярными оказались три мультфильма: «Белоснежка и семь гномов», «Губка Боб Квадратные Штаны», «Волк и теленок». Всего в классе 38 человек. «Белоснежку и семь гномов» выбрали 21 ученик, среди которых трое назвали еще «Волк и теленок», шестеро – «Губка Боб Квадратные Штаны», а один написал все три мультфильма. Мультфильм «Волк и теленок» назвали 13 ребят, среди которых пятеро выбрали сразу два мультфильма. Сколько человек выбрали мультфильм «Губка Боб Квадратные Штаны»?

Решение: В этой задаче 3 множества, из условий задачи видно, что все они пересекаются между собой. Получаем такой чертеж:



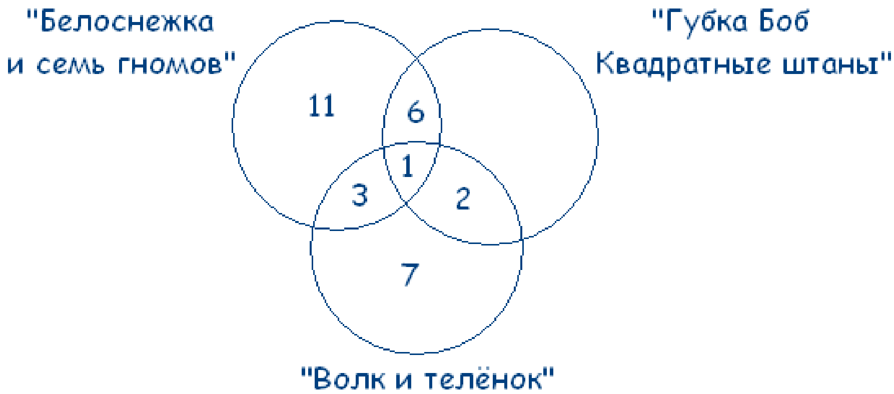
Учитывая условие, что среди ребят, которые назвали мультфильм «Волк и теленок» пятеро выбрали сразу два мультфильма, получаем:



21 – 3 – 6 – 1 = 11 – ребят выбрали только «Белоснежку и семь гномов».

13 – 3 – 1 – 2 = 7 – ребят смотрят только «Волк и теленок».

Получаем:



38 – (11 + 3 + 1 + 6 + 2 + 7) = 8 – человек смотрят только «Губка Боб Квадратные Штаны».

Делаем вывод, что «Губка Боб Квадратные Штаны» выбрали 8 + 2 + 1 + 6 = 17 человек.

Ответ. 17 человек выбрали мультфильм «Губка Боб Квадратные Штаны».

Содержание практической работы

Задание 1. 1) Найти множества A∩B, AUB, A/B, B/A, если:

а) A={е, о, р, х} B={х, у}

б) A={x: -3<x<4} B={x: 0≤x≤6}

в) A={2^n+1}, B={n+1} nϵN

2) Найти множества A∩B, AUB, A/B, B/A, если:

а) A={12, 13, 14, 15} B={12, 14, 16}

б) A={x: 0<x<2} B={x: 1≤x≤4}

в) A={3-(n+1)}, B={n+5} nϵN

Задание 2. 1) На 1 курсе учатся 200 студентов, 106 из них знают английский язык, 60 – немецкий, 92 – французский. 24 студента знают английский и немецкий языки, 36 – английский и французский, 30 – немецкий и французский, 14 – все три языка. Остальные знают только один испанский язык. Сколько студентов знают:

а) только один язык?

б) испанский язык?

в) только немецкий язык?

г) знают английский и немецкий, но не знают французский?

2) На 1 курсе учатся 200 студентов, 106 из них знают английский язык, 60 – немецкий, 92 – французский. 24 студента знают английский и немецкий языки, 36 – английский и французский, 30 – немецкий и французский, 14 – все три языка. Остальные знают только один испанский язык. Сколько студентов знают:

а) ровно два языка?

б) только французский язык?

в) знают немецкий и французский, но не знают английский?

г) не знают испанский язык?

Практическая работа №11-13

Тема: Отработка навыков методов сбора. Обработки статистических данных для получения практических выводов.

Цель: выполнять расчеты статистических показателей и формулировать основные выводы.

Теоретические сведения к практической работе.

Стати́стика — отрасль знаний, в которой излагаются общие вопросы сбора, измерения и анализа массовых статистических (количественных или качественных) данных; изучение количественной стороны массовых общественных явлений в числовой форме

Современную математическую статистику определяют как *науку о принятии решений в условиях неопределенности.* Можно выделить две основные задачи математической статистики:

1. Указать способы сбора и группировки статистических сведений, полученных в результате наблюдений или в результате поставленных экспериментов.
2. Разработать методы анализа статистических данных в зависимости от целей исследования. В связи с этим проводится:

1. оценка: неизвестной вероятности события, неизвестной функции распределения, параметров распределения, зависимости случайной величины от одной или нескольких случайных величин.
2. проверка статистических гипотез о виде неизвестного распределения или о величине параметров распределения.

Итак, задача математической статистики состоит в создании методов сбора и обработки статистических данных для получения научных и практических выводов.

Генеральная и выборочная совокупности

Выборочной совокупностью (выборкой) называют совокупность случайно отобранных объектов.

Генеральной совокупностью (ГС) называют совокупность объектов, из которых произведена выборка.

Объем совокупности – число объектов этой совокупности.

Например: из 1000 деталей отбирается 100, тогда Vг.с. = 1000, Vв.с. = 100.

Повторная и бесповторная выборки. Репрезентативная выборка

При составлении выборки можно поступать двумя способами: после того, как объект отобран и над ним произведено наблюдение, он может быть возвращен либо не возвращен в генеральную совокупность. В первом случае выборку называют повторной, во втором – бесповторной. Выборка должна правильно представлять пропорции генеральной совокупности – быть *репрезентативной* (представительной).

Способы отбора

Отбор, не требующий расчленения ГС на части: простой случайный бесповторный отбор; простой случайный повторный отбор.	Отбор, при котором ГС расчленяется на части: типический отбор; механический отбор; серийный отбор.

Методами статистической обработки результатов называются математические приемы, формулы, способы количественных расчетов, с помощью которых показатели, получаемые в ходе эксперимента, можно обобщать, приводить в систему, выявляя скрытые в них закономерности. Речь идет о таких закономерностях статистического характера, которые существуют между изучаемыми в эксперименте переменными величинами.

1. Методы первичной статистической обработки результатов эксперимента.

Все методы математико-статистического анализа условно делятся на первичные и вторичные. Первичными называют методы, с помощью которых можно получить показатели, непосредственно отражающие результаты производимых в эксперименте измерений. Соответственно под первичными статистическими показателями имеются в виду те, которые применяются в самих психодиагностических методиках и являются итогом начальной статистической обработки результатов психодиагностики. Вторичными называются методы статистической обработки, с помощью которых на базе первичных данных выявляют скрытые в них статистические закономерности.

К первичным методам статистической обработки относят, например, определение выборочной средней величины, выборочной дисперсии, выборочной моды и выборочной медианы. В число вторичных методов обычно включают корреляционный анализ, регрессионный анализ, методы сравнения первичных статистик у двух или нескольких выборок.

Рассмотрим методы вычисления элементарных математических статистик.

Модой называют количественное значение исследуемого признака, наиболее часто встречающееся в выборке.

Медианой называется значение изучаемого признака, которое делит выборку, упорядоченную по величине данного признака, пополам.

Выборочное среднее (среднее арифметическое) значение как статистический показатель представляет собой среднюю оценку изучаемого в эксперименте психологического качества.

Разброс (иногда эту величину называют размахом) выборки обозначается буквой R. Это самый простой показатель, который можно получить для выборки - разность между максимальной и минимальной величинами данного конкретного вариационного ряда.

Дисперсия - это среднее арифметическое квадратов отклонений значений переменной от её среднего значения.

2. Методы вторичной статистической обработки результатов эксперимента.

С помощью вторичных методов статистической обработки экспериментальных данных непосредственно проверяются, доказываются или опровергаются гипотезы, связанные с экспериментом. Эти методы, как правило, сложнее, чем методы первичной статистической обработки, и требуют от исследователя хорошей подготовки в области элементарной математики и статистики.

Обсуждаемую группу методов можно разделить на несколько подгрупп:

1 **Регрессионное исчисление.**

Регрессионное исчисление - это метод математической статистики, позволяющий свести частные, разрозненные данные к некоторому линейному графику, приблизительно отражающему их внутреннюю взаимосвязь, и получить возможность по значению одной из переменных приблизительно оценивать вероятное значение другой переменной.

2.Корреляция.

Следующий метод вторичной статистической обработки, посредством которого выясняется связь или прямая зависимость между двумя рядами экспериментальных данных, носит название метод корреляций. Он показывает, каким образом одно явление влияет на другое или связано с ним в своей динамике. Подобного рода зависимости существуют, к примеру, между величинами, находящимися в причинно-следственных связях друг с другом. Если выясняется, что два явления статистически достоверно коррелируют друг с другом и если при этом есть уверенность в том, что одно из них может выступать в качестве причины другого явления, то отсюда определенно следует вывод о наличии между ними причинно-следственной зависимости.

3 Факторный анализ.

Факторный анализ - статистический метод, который используется при обработке больших массивов экспериментальных данных. Задачами факторного анализа являются: сокращение числа переменных (редукция данных) и определение структуры взаимосвязей между переменными, т.е. классификация переменных, поэтому факторный анализ используется как метод сокращения данных или как метод структурной классификации.

Содержание практической работы.

1. В сводке приведены сведения о количестве гражданских дел по ответственности за нарушение обязательств в суде, а также сведения об общей сумме всех исков с января по июль:

Месяц	Средняя сумма на один иск, руб.	Общая денежная сумма всех исков, руб.
Январь	1 000	10 000
Февраль	2 500	100 000
Март	5 000	25 000
Апрель	20 000	500 000
Май	1 000	12 000
Июнь	2 500	500 000
Июль	3 000	45 000

Определите по сводке, какая сумма денег приходится в среднем на одно дело?

2. По данным МВД количество зарегистрированных преступлений, совершенных в районе несовершеннолетними в возрасте:

Определите тип исследуемого признака и постройте табличное и графическое представление данных, укажите моду и медиану. Сделайте выводы.

3. В условии задачи 2 найти значения эмпирической функции распределения, построить ее график.

4. Контролер ОТК взвесил 40 пакетов молока и записал массу каждого из них (в граммах):

973,01 987,45 972,30 998,46

Число детей

Количество семей

Определите пределы, в которых будет находиться среднее число детей в семьях осужденных в генеральной совокупности. Уровень значимости принять равным 5 %.

6. В период с 2004-2011 гг. на территории некоторого района города N было зарегистрировано:

год

число зарегистрированных преступлений

численность населения в районе	62	68	67	71	89	91	91	92
	180	467	560	444	600	400	550	100

Исследуйте зависимость числа зарегистрированных преступлений от численности населения. Представьте зависимость графически. Постройте уравнение линейной регрессии, дайте прогноз числу преступлений, если численность будет равна 95 540 человек. Результаты вычислений представить таблично.

7. Страховая компания изучает вероятность ДТП для подростков, имеющих мотоциклы. За прошедший год проведена случайная выборка 2 000 страховых полисов подростков-мотоциклистов и выявлено, что 15 из них попадали в ДТП и предъявили компании требование о компенсации за ущерб. Может ли аналитик компании отклонить гипотезу о том, что менее 1 % всех подростков – мотоциклистов попадали в ДТП в прошлом году. Принять уровень значимости 5 %.

Рекомендуемая литература

Основные источники

1. Григорьев С.Г., Иволгина С.В. Математика. – М.: Образовательно-издательский центр «Академия», 2011
2. Григорьев В.П., Сабурова Т.Н. Сборник задач по высшей математике. – М: Издательский центр «Академия», 2011
3. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике. – М.: Высшая школа, 2009
4. Дадаян А.А. Математика: учеб.- М.: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2005

Дополнительные источники

1. Высшая математика для экономистов. Под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ, 2007
2. Математика и информатика: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования / Виноградов Ю.Н., Гомола А.И., Потапов В.И., Соколова Е.В./ - М.: Издательский центр «Академия», 2009
3. Математика для профессий и специальностей социально-экономического профиля: учебник для образовательных учреждений нач. и сред. образования / В.А. Гусев, С.Г. Григорьев, С.В. Иволгина. – М.: Издательский центр «Академия», 2011
4. Спирина М.С. дискретная математика: учеб. – М.: Издательский центр «Академия», 2006
5. Омельченко В.П. Математика. – Ростов-на-Дону.: Феникс, 2006