УДК 512.13

О ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ КОРНЕЙ В ПРОЦЕССЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ

Решение иррациональных уравнений предполагает преобразования корней, которые выполняются на основании их свойств. Приведём список этих свойств.

1. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$. 2. $\sqrt[2n]{a^{2n}}=|a|$. 3. $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$.

4. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$. 5. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$. 6. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$.

7. $\sqrt[nm]{a^{km}}=\sqrt[n]{a^k}$.

Если показатель корня – чётное число, то все перечисленные свойства, кроме 6, изменяют область определения уравнения, что может привести к приобретению посторонних корней или к их потере. Приведём примеры.

Пример 1. Решить уравнение:

$$\sqrt{2x^2-2x}+\sqrt{x^2+x-2}=\sqrt{x^2-15x+14}.$$

Область определения данного уравнения $D=(-\infty;-2]\cup\{1\}\cup[14;+\infty)$.

При $x\in D$ данное уравнение равносильно уравнению

$$\sqrt{2x(x-1)}+\sqrt{(x-1)(x+2)}=\sqrt{(x-1)(x-14)}.$$

Воспользуемся свойством 3. Получим:

$$\sqrt{2x}\cdot\sqrt{x-1}+\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+2}=\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x-14}.$$

Выполненное преобразование сузило область определения данного уравнения до значений $x\in$¿, что может привести к потере корней.

Чтобы избежать такой потери, воспользуемся модулем. Тогда получим уравнение:

$$\sqrt{|2x|}\cdot\sqrt{|x-1|}+\sqrt{|x-1|}\cdot\sqrt{|x+2|}=\sqrt{|x-1|}\cdot\sqrt{|x-14|}.$$

Раскрывая модуль на области определения данного уравнения, решим совокупность двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{2x}\cdot\sqrt{x-1}+\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+2}=\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x-14}\ \text{при}\ x\geq 14,\\ \sqrt{-2x}\cdot\sqrt{-(x-1)}+\sqrt{-(x-1)}\cdot\sqrt{-(x+2)}=\sqrt{-(x-1)}\cdot\sqrt{-(x-14)}\ \text{при}\ x\leq 2.\end{array}\right.$$

Корни данного уравнения: $-4;1$. Модуль позволил избежать потери.

Рассмотрим применение свойства 7 на примерах выражений $\sqrt[4]{a^2}$и $\sqrt[6]{a^2}$. Свойство 7 позволяет разделить показатель степени и показатель корня на одно и то же число. Тогда получим $\sqrt[4]{a^2}=\sqrt{a}$, $\sqrt[6]{a^2}=\sqrt[3]{a}$. В первом равенстве $\sqrt[4]{a^2}=\sqrt{a}$ левая и правая части имеют разные области определения. Чтобы спасти ситуацию, перепишем его в виде $\sqrt[4]{a^2}=\sqrt{|a|}$. Во втором равенстве $\sqrt[6]{a^2}=\sqrt[3]{a}$ области определения совпадают, однако, левая часть принимает при $a\in R$ неотрицательные значения, а правая как неотрицательные (при $a\geq 0$), так и отрицательные (при $a<0$). Поэтому $\sqrt[6]{a^2}=|\sqrt[3]{a}|=\begin{cases}\sqrt[3]{a}\, при\, a\geq 0,\\ -\sqrt[3]{a}\, при\, a<0.\end{cases}$

Отметим, что к нарушению равносильности уравнений могут приводить сокращение дробей, приведение подобных слагаемых, преобразования логарифмов и тригонометрических выражений.

Литература

1. Бондаренко Т.Е. Тождественные преобразования в процессе решения уравнений: учебное пособие по элементарной математике. – Воронеж: НАУКА – ЮНИПРЕСС, 2012. – 59 с.

Плужникова Екатерина Алексеевна, учитель математики МБОУ СОШ №74, г. Воронеж.